Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Tutorato 3 (31 Marzo 2011)

1. Sia $X = \mathbb{R}$, sia $S := \{1, 2, 3\} \cup (4, 5)$ e sia ρ la relazione d'equivalenza così definita:

$$x\rho y \Leftrightarrow x = y \quad \text{oppure} \quad x, y \in S.$$

Verificare che la proiezione sul quoziente $p : X \to X/\rho$ non è nè aperta nè chiusa.

Soluzione:

Per verificare che p non è aperta (risp. chiusa), basterà trovare un aperto (risp. un chiuso) di $\mathbb{R}$ tale che la sua immagine attraverso p non sia un aperto (risp. un chiuso) nella topologia quoziente X/ρ.

Consideriamo $A = (1, 3)$ e $C = [1, 3]$ rispettivamente aperto e chiuso di $\mathbb{R}$. Si ha:

$p(A) = p(C) = \{[1]_\rho, [x]_\rho, x \in (1, 2) \cup (1, 3)\}$.

Mostriamo che $p(A) = p(C)$ non è nè aperto nè chiuso, ovvero, per definizione di topologia quoziente, che $B := p^{-1}(p(A)) = p^{-1}(p(C))$ non è nè aperto nè chiuso in $\mathbb{R}$; infatti:

$B = [1, 3] \cup (4, 5)$

non è nè aperto nè chiuso in $\mathbb{R}$ in quanto $\text{Int}B = (1, 3) \cup (4, 5) \subsetneq B \subsetneq [1, 3] \cup [4, 5] = \overline{B}$.

2. Sia ρ la relazione d'equivalenza su $\mathbb{R}$ così definita:

$$x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

Dimostrare che $\mathbb{R}/\rho$ è omeomorfo alla semiretta chiusa $[0, +\infty)$.

Soluzione:

Ricordiamo che:
Dati X, Y, Z spazi topologici e un'identificazione $p : X \to Y$, un'applicazione $g : Y \to Z$ è un omeomorfismo se e solo se g è biettiva e $g \circ p$ è un'identificazione.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g \circ p"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Nel nostro caso $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}/\rho$, $Z = [0, +\infty)$. Inoltre $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\rho$ è tale che $p(x) = [x]_\rho \, \forall \, x \in \mathbb{R}$, dove $[x]_\rho = \{-x, x\}$ se $x \neq 0$ e $[0]_\rho = \{0\}$.

Definiamo $g : \mathbb{R}/\rho \to [0, +\infty]$ come segue:

$$g([x]_\rho) = |x|, \, \forall \, [x]_\rho \in \mathbb{R}/\rho.$$

Si ha quindi il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g \circ p"] \arrow[d, "p"'] & {[0, +\infty)} \\ \mathbb{R}/\rho \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Dunque per dimostrare che g è un omeomorfismo sarà sufficiente far vedere che g è biettiva e $g \circ p$ è un'identificazione, dove $g \circ p : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ è tale che $(g \circ p)(x) = |x|$.

- g è biettiva:

  <u>iniettività</u>: siano $[x]_\rho, [y]_\rho \in \mathbb{R}/\rho$ tali che $g([x]_\rho) = g([y]_\rho) \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow x \,\rho\, y \Rightarrow [x]_\rho = [y]_\rho$;

  <u>suriettività</u>: $\forall x \in [0, +\infty)$, $x = |x| = g([x]_\rho)$, $[x]_\rho \in \mathbb{R}/\rho$.

- $g \circ p$ è un'identificazione:

  Basterà mostrare che $g \circ p$ è suriettiva e che $[0, +\infty)$ è dotato della topologia quoziente rispetto a $g \circ p$ (infatti la continuità di $g \circ p$ seguirà dal fatto che la topologia quoziente è più fine di ogni altra topologia che renda $g \circ p$ continua).

  $g \circ p$ è chiaramente suriettiva.
  Mostriamo dunque che $A \subseteq [0, +\infty)$ è aperto $\Leftrightarrow (g \circ p)^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}$.

  $\Rightarrow$: $[0, +\infty) \subsetneq \mathbb{R}$ è dotato della topologia di sottospazio. Quindi, data $\mathfrak{B} := \{(a, b) \cap [0, +\infty) \, : \, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ base della topologia indotta da $\mathbb{R}$ su $[0, +\infty)$, sarà sufficiente dimostrare l'asserto per gli aperti della base. Osserviamo che:

  $$A = (a,b) \cap [0,+\infty) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } b \leq 0 \\ [0,b) & \text{se } a < 0 < b \\ (a,b) & \text{se } a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (g \circ p)^{-1}(A) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } b \leq 0 \\ (-b,b) & \text{se } a < 0 < b \\ (-b,-a) \cup (a,b) & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

  Segue l'asserto essendo $\varnothing$, $(-b, b)$, $(-b, -a) \cup (a, b)$ aperti in $\mathbb{R}$.

  $\Leftarrow$: Sia $A \subseteq [0, +\infty)$ tale che $(g \circ p)^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}$.
  Facciamo vedere che $A = [0, +\infty) \cap (g \circ p)^{-1}(A)$ da cui A risulta aperto nella topologia indotta da $\mathbb{R}$ su $[0, +\infty)$. Ciò segue direttamente dal fatto che $(g \circ p)^{-1}(A) = \{x \in A\} \cup \{-x : x \in A\}$.

3. Sia $f : X \to Y$ un'identificazione, $B \subseteq Y$ un sottospazio aperto e $A = f^{-1}(B) \subseteq X$. Dimostrare che l'applicazione $g : A \to B$ indotta da f è un'identificazione.

   <u>*Soluzione*</u>:
   Osserviamo innanzitutto che, essendo g indotta da f, si ha $g(x) = f(x) \, \forall \, x \in A$.
   Affinché g sia un'identificazione sarà sufficiente dimostrare che g è suriettiva e che B è dotato della topologia quoziente rispetto a g (la continuità di g seguirà direttamente da quest'ultimo fatto).

   - <u>g è suriettiva:</u>
     $g(A) = f(A) = f(f^{-1}(B)) = B$ (l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che, essendo f suriettiva, ammette un'inversa a destra).

   - <u>B ha la topologia quoziente rispetto a g:</u>

     Dobbiamo dimostrare che:

     $$B_1 \subseteq B \text{ è aperto } \Leftrightarrow g^{-1}(B_1) \text{ è aperto in } A$$

     $\Rightarrow$: Sia $B_1 \subseteq B$ aperto in $B \Rightarrow B_1 = B \cap A_Y$ con $A_Y \subseteq Y$ aperto in Y.

     $$g^{-1}(B_1) = g^{-1}(B \cap A_Y) = f^{-1}(B \cap A_Y) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A_Y) = A \cap f^{-1}(A_Y)$$

Ora f è un'identificazione (in particolare f è continua); essendo $A_Y \subseteq Y$ aperto in Y segue che $f^{-1}(A_Y) \subseteq X$ è aperto in X.
Otteniamo dunque che $g^{-1}(B_1)$ è aperto nella topologia di sottospazio di A in X.

$\Leftarrow$: Sia $g^{-1}(B_1) \subseteq A$ aperto in A; allora:

$g^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_1) = A \cap A_X$ con $A_X \subseteq X$ aperto in X.
Ora, per ipotesi, abbiamo che $A = f^{-1}(B)$, con B aperto in Y; dalla continuità di f, segue che A è aperto in X, da cui $g^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_1)$ è aperto in X perché intersezione finita di aperti di X.
Inoltre, poiché f è un'identificazione, sappiamo che:

$$f^{-1}(B_1) \text{ è aperto in } X \Leftrightarrow B_1 \text{ è aperto in } Y.$$

Possiamo concludere che B_1 è aperto in Y e conseguentemente in B, poiché $B_1 = B \cap B_1$ con B_1 aperto in Y.

4. Sia $p : X \to Y$ un'identificazione. Dimostrare che se D è un sottoinsieme denso di X, $p(D)$ è denso in Y.

<u>*Soluzione*</u>:

D è un sottoinsieme denso di $X \Leftrightarrow \overline{D} = X$.
Supponiamo, per assurdo, che $p(D)$ non sia denso in $Y \Rightarrow \overline{p(D)} = C \subsetneq Y$, con C chiuso in Y.
Consideriamo $p^{-1}(C)$. Dalla continuità di p segue che $p^{-1}(C)$ è chiuso in X; inoltre è chiaro che $D \subseteq p^{-1}(C)$. Si ha:

$X = \overline{D} \subseteq \overline{p^{-1}(C)} = p^{-1}(C) \Rightarrow X = p^{-1}(C) \Rightarrow Y = p(X) = p(p^{-1}(C)) = C,$

contro l'ipotesi che $C \subsetneq Y$.

5. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ ed $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici e sia $\mathcal{T}_{X\times Y}$ la topologia prodotto su $X \times Y$. Verificare:

(a) $\mathcal{T}_{X\times Y}$ è la topologia discreta $\Leftrightarrow \mathcal{T}_X$ ed $\mathcal{T}_Y$ sono rispettivamente la topologia discreta su X e su Y;

(b) $\mathcal{T}_{X\times Y}$ è la topologia banale $\Leftrightarrow \mathcal{T}_X$ ed $\mathcal{T}_Y$ sono rispettivamente la topologia banale su X e su Y.

<u>*Soluzione*</u>:

(a) $\Rightarrow$: Sia $\mathcal{T}_{X\times Y}$ la topologia discreta su $X \times Y$. Mostriamo che ogni sottoinsieme di X è aperto in X.
Sia dunque $A \subseteq X \Rightarrow A \times Y$ è aperto in $\mathcal{T}_{X\times Y}$.
Consideriamo $\pi_X : X\times Y \to X$, la proiezione su X; ricordando che π_X è un'applicazione aperta si ha che $A = \pi_X(A \times Y)$ è aperto in X.
Ne segue che $\mathcal{T}_X$ è la topologia discreta su X.
Si dimostra, in modo analogo, che $\mathcal{T}_Y$ è la topologia discreta su Y.

$\Leftarrow$: Siano $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$ rispettivamente la topologia discreta su X e su Y.
Basterà verificare che $\forall\, (x, y) \in X \times Y$, $\{(x, y)\} \in \mathcal{T}_{X\times Y}$.
Infatti $\{(x, y)\} = \{x\} \times \{y\} \in \mathcal{T}_X \cdot \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{X\times Y}$.

(b) $\Rightarrow$: Sia $T_{X\times Y}$ la topologia banale su $X \times Y$ ($T_{X\times Y} = \{\varnothing, X \times Y\}$) e sia $A \in \mathcal{T}_X \Rightarrow A \times Y \in \mathcal{T}_{X\times Y} \Rightarrow A = \varnothing$ o $A = X \Rightarrow \mathcal{T}_X = \{\varnothing, X\}$.
Analogamente si dimostra che $\mathcal{T}_Y$ è la topologia banale su Y.

$\Leftarrow$: Per ipotesi $\mathcal{T}_X = \{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{T}_Y = \{\varnothing, Y\}$.
Sappiamo che $\mathcal{T}_{X\times Y}$ ha come base $\mathcal{T}_X \cdot \mathcal{T}_Y = \{\varnothing, X \times Y\} \Rightarrow T_{X\times Y} = \{\varnothing, X \times Y\}$ è la topologia banale su $X \times Y$.

6. Sia K un campo, $n \geq 1$ e $X_1, \dots, X_n$ indeterminate. Sia $K[X_1, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi in $X_1, \dots, X_n$ a coefficienti in K.
Dato $S \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ un sottoinsieme di polinomi, definiamo:

$$V(S) : \{\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n : f(\mathbf{a}) = 0 \,\forall\, f \in S\}.$$

Dimostrare che:

(a) $V(S) = V((S))$, dove $(S) := \{p_1 f_1 + \dots + p_h f_h : f_1, \dots, f_h \in S, p_1, \dots, p_h \in K[X_1, \dots, X_n]\}$;

(b) Su K^n si può definire una topologia $\mathcal{Z}$, detta topologia di Zariski, che ha come insiemi chiusi la classe $\mathcal{C}$ definita come segue:

$$\mathcal{C} := \{V(S) : \forall\, S \subseteq K[X_1, \dots, X_n]\};$$

(c) i punti sono chiusi in $(K^n, \mathcal{Z})$;

(d) Se $n = 1$, $\mathcal{Z}$ coincide con la topologia cofinita.

Soluzione:

(a) Sia $S = \{f_i,\, i \in I\}$. Dimostriamo l'uguaglianza per doppio contenimento:

$\subseteq$: Sia $\mathbf{a} \in V(S) \Rightarrow f_i(\mathbf{a}) = 0 \quad \forall\, i \in I$. Sia $g \in (S) \Rightarrow g = p_1 f_1 + \dots + p_h f_h$, $f_i \in S$ e $p_i \in K[X_1, \dots, X_n]$, $\forall\, i = 1, \dots, h$. Si ha:

$$g(\mathbf{a}) = p_1(\mathbf{a}) f_1(\mathbf{a}) + \dots + p_h(\mathbf{a}) f_h(\mathbf{a}) = p_1(\mathbf{a}) \cdot 0 + \dots + p_h(\mathbf{a}) \cdot 0 = 0$$

Dall'arbitrarietà di g segue che $\mathbf{a} \in V((S))$.

$\supseteq$: E' semplice verificare che, dati S, T sottoinsiemi di $K[X_1, \dots, X_n]$, se $S \subseteq T$ allora $V(S) \supseteq V(T)$.
Nel nostro caso abbiamo $S \subseteq (S)$; segue quindi che $V(S) \supseteq V((S))$.

(b) Dimostriamo che $\mathcal{Z}$ è una topologia.

- $\{\varnothing\}$ e K^n sono chiusi :

  E' facile verificare che $K^n = V(0)$ e $\{\varnothing\} = V(1)$.

- L'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso:
  Per dimostrare l'asserto basterà verificare la seguente proprietà:

$$\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i),\ S_i = \{f_{i,j},\, j \in J_i\}$$

  $\mathbf{a} \in \bigcap_{i \in I} V(S_i) \Leftrightarrow \mathbf{a} \in V(S_i) \forall\, i \in I \Leftrightarrow f_{i,j}(\mathbf{a}) = 0, \forall\, j \in J_i, \forall\, i \in I \Leftrightarrow \mathbf{a} \in V(\bigcup_{i \in I} S_i)$.

- L'unione finita di chiusi è un chiuso:
  Dimostriamo, per doppio contenimento, che $\forall S_1, S_2 \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ vale la seguente proprietà:

$$V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 \cdot S_2), \quad S_1 \cdot S_2 = \{f \cdot g : f \in S_1, g \in S_2\}$$

$\subseteq$: Sia $\mathbf{a} \in V(S_1) \cup V(S_2) \Rightarrow \mathbf{a} \in V(S_1)$ oppure $\mathbf{a} \in V(S_2)$.
Supponiamo che $\mathbf{a} \in V(S_1) \Rightarrow f(\mathbf{a}) = 0, \forall f \in S_1$. Considerando allora $f \cdot g \in S_1 \cdot S_2$ con $f \in S_1$ e $g \in S_2$, si ha:
$f \cdot g(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) = 0 \cdot g(\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \in V(S_1 \cdot S_2)$;

$\supseteq$: Sia, ora, $\mathbf{a} \in V(S_1 \cdot S_2) \Rightarrow f(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) = 0 \quad \forall f \in S_1$ e $g \in S_2$.
Supponiamo che $\mathbf{a} \notin V(S_1) \Rightarrow \quad \exists \tilde{f} \in S_1$ tale che $\tilde{f}(\mathbf{a}) \neq 0$.
Ma, per ipotesi, $\tilde{f}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) = 0 \quad \forall g \in S_2 \Rightarrow g(\mathbf{a}) = 0 \, \forall g \in S_2 \Rightarrow \mathbf{a} \in V(S_2) \Rightarrow \mathbf{a} \in V(S_1) \cup V(S_2)$.

(c) Sia $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$; scelto $S = \{X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n\}$ è facile verificare che $V(S) = \{(a_1, \dots, a_n)\} \Rightarrow \mathbf{a}$ è un chiuso rispetto a $\mathcal{Z}$.

(d) Sia $n = 1$; mostriamo che i chiusi, fatta eccezione per K^n, hanno cardinalità finita. Sia C un chiuso di $\mathcal{Z}$; allora C è della forma: $C = V(f_i, \, i \in I)$. Scelto un qualsiasi $\bar{i} \in I$, si ha:

$C = V(f_i, \, i \in I) \subseteq V(f_{\bar{i}})$ da cui $\#C \leq \#V(f_{\bar{i}}) \leq \partial(f_{\bar{i}})$ (per il teorema fondamentale dell'algebra). Ne segue che C ha cardinalità finita.

7. Sia X una corona circolare chiusa in $\mathbb{R}^2$ racchiusa dalle circonferenze C_1 e C_2. Consideriamo su X le seguenti relazioni di equivalenza:

$$x \, \rho_i \, y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure } x, y \in C_i, \quad i = 1, 2.$$

A cosa è omeomorfo il quoziente X/ρ_i?

<u>*Soluzione*</u>:

Fissato un riferimento cartesiano, non è restrittivo supporre che C_1 e C_2 siano le circonferenze di centro $(0, 0)$ e raggi rispettivamente a e b.
Indichiamo con $r = \|\mathbf{x}\|$ e $\vartheta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, $\quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{x} = (r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$.
Allora $X = \{(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) : r \in [a, b], \, \vartheta \in [0, 2\pi]\}$.

Dimostriamo che, per $i = 1, 2$, il quoziente X/ρ_i è omeomorfo a $D^2 := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : r = \|\mathbf{x}\| \ \leq 1\}$.
Consideriamo l'applicazione $g_1 : X/\rho_1 \to D^2$, definita nel modo seguente:

$$g_1([\mathbf{x}]_{\rho_1}) = \frac{1}{b-a}(r-a)(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)), \, \forall \, [\mathbf{x}]_{\rho_1} \in X/\rho_1$$

Si può verificare come nell'esercizio 2 che g_1 è un omeomorfismo.

Analogamente per $i = 2$ l'omeomorfismo $g_2 : X/\rho_2 \to D^2$ è definito nel modo seguente:

$$g_2([\mathbf{x}]_{\rho_2}) = \frac{1}{b-a}(b-r)(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)), \, \forall \, [\mathbf{x}]_{\rho_2} \in X/\rho_2$$

8. Trovare un esempio di applicazione continua $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$, determinando opportunamente per ciascun caso $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$, tale che:

(a) f sia aperta e non chiusa;

(b) f sia chiusa e non aperta;

(c) f sia chiusa e aperta;

(d) f non sia né aperta né chiusa.

Soluzione:

La continuità delle seguenti applicazioni è ovvia poiché la topologia dello spazio di partenza è quella discreta.

(a) $X = Y = \{a, b\}$, $\quad \mathcal{T}_X$ la topologia discreta, $\quad \mathcal{T}_Y := \{\{\varnothing\}, \{a\}, \{a, b\}\}$ $\quad$ ed $\quad f \equiv a$.

L'applicazione è aperta poichè $\forall\, A$ aperto di X si ha che $f(A) = \{a\}$ è aperto in Y. Non è chiusa poiché, preso ad esempio $\{b\}$ chiuso in X, $f(\{b\}) = \{a\}$ che non è chiuso in Y in quanto $\{a\}^c = \{b\}$ non è aperto;

(b) $X = Y = \{a, b\}$, $\quad \mathcal{T}_X$ la topologia discreta, $\quad \mathcal{T}_Y := \{\{\varnothing\}, \{a\}, \{a, b\}\}$ $\quad$ ed $\quad f \equiv b$.

L'applicazione è chiusa poichè $\forall\, C$ chiuso di X si ha che $f(C) = \{b\}$ è chiuso in Y in quanto $\{b\}^c = \{a\}$ è aperto in Y.
Non è aperta poiché, preso ad esempio $\{a\}$ aperto in X, $f(\{a\}) = \{b\}$ non è aperto in Y;

(c) $X = Y$, $\quad \mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y \quad$ e $\quad f(x) = x \;\; \forall x \in X$.

In particolare, l'applicazione è un omeomorfismo quindi è sia chiusa che aperta;

(d) $X = Y$ (aventi almeno due punti), $\quad \mathcal{T}_X$ la topologia discreta, $\quad \mathcal{T}_Y$ la topologia banale e $f(x) = x \;\; \forall x \in X$.

Preso qualsiasi $\{x\} \in X$, $\{x\}$ è aperto (risp. chiuso) in X ma $f(\{x\}) = \{x\}$ non è aperto (risp. non è chiuso) in Y.

9. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$ e siano $\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 = 1\}$ e $\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 1\}$. Sia $Y = \gamma_1 \cup \gamma_2$ e X/ρ_Y il quoziente di X ottenuto identificando Y a un punto (ovvero quozientando X rispetto alla relazione di equivalenza ρ_Y tale che $x \,\rho_Y\, y \Leftrightarrow x = y$ oppure $x, y \in Y$). Dire se la proiezione $p : X \to X/\rho_Y$ è aperta o non aperta, chiusa o non chiusa.

Soluzione:

- p è chiusa:
  Osserviamo innanzitutto che γ_1 e γ_2 sono chiusi in X, in quanto chiusi in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow Y = \gamma_1 \cup \gamma_2$ è chiuso in X.
  Sia C un chiuso di X; consideriamo due casi:

  - $C \cap Y = \varnothing \Rightarrow p^{-1}(p(C)) = C$ è chiuso in $X \Rightarrow p(C)$, per definizione di topologia quoziente, è chiuso in X/ρ_Y;

  - $C \cap Y \neq \varnothing \Rightarrow p^{-1}(p(C)) = C \cup Y$ è chiuso in $X \Rightarrow p(C)$, per definizione di topologia quoziente, è chiuso in X/ρ_Y.

  In ogni caso l'immagine di un chiuso è chiusa.

- p non è aperta:
  Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 \leq 1\} = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 < 2\} \Rightarrow A$ è aperto in X. Si ha:

  $p^{-1}(p(A)) = A \cup \gamma_2$ non è aperto in $X \Rightarrow p(A)$ non è aperto in X/ρ_Y.