Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Tutorato 2 (24 Marzo 2011)

1. Descrivere la topologia relativa su $\mathbb{Z}$ come sottospazio di $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita. Dire se i punti sono chiusi in questa topologia. Dire se la topologia discreta è strettamente più fine giustificando la risposta.

2. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$. Dire quale dei seguenti sottoinsiemi sono chiusi in X con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

   $A = \{(x, y) : xy = 1, x > 0\}$;
   $B = \{(\frac{1}{n}, 1) : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$;
   $C = \{(x, y) : x + y = 1, x > 0, y > 0\}$;
   $D = \{(1, \frac{1}{n}) : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$.

3. Sia$(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e siano A e B sottoinsiemi di X; verificare:
   (a) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
   (b) $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$; $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;
   (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

4. Determinare opportuni intervalli A e B della retta euclidea $\mathbb{R}$ in modo che siano verificate le seguenti condizioni:
   (a) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subsetneq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$; $\mathrm{Fr}(A \cap B) \not\subseteq \mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)$; $\mathrm{Fr}(A \cap B) \not\supseteq \mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)$;
   (b) $\mathrm{Int}(A \cup B) \supsetneq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$;
   (c) $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$;

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione così definita: $f(x) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Consideriamo le seguenti topologie su $\mathbb{R}$: ε, $i_d := \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\} \cup \{\mathbb{R}\}$, j_d (la topologia che ha per base l'insieme $\mathcal{B}_d = \{[a, b) \subseteq \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$). Verificare che:
   (a) $f : (\mathbb{R}, \varepsilon) \to (\mathbb{R}, \varepsilon)$ è continua;
   (b) $f : (\mathbb{R}, i_d) \to (\mathbb{R}, i_d)$ non è continua;
   (c) $f : (\mathbb{R}, j_d) \to (\mathbb{R}, j_d)$ non è continua.

6. (a) Costruire esplicitamente un omeomorfismo tra due segmenti chiusi e limitati X ed Y assegnati in $\mathbb{R}^2$.
   (b) Assegnate le poligonali di vertici rispettivamente $P_1(1, 3), P_2(3, 1), P_3(5, 1), P_4(5, 4)$ e $Q_1(0, 0)$, $Q_2(3, 2), Q_3(5, 2), Q_4(3, 0)$, costruire un omeomorfismo tra $\prod(P_1, P_2, P_3, P_4)$ e $\prod(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.
   (c) Assegnate le poligonali di vertici rispettivamente $P_1(1, 3), P_2(3, 1), P_3(5, 1)$ e $Q_1(0, 0), Q_2(3, 2)$, $Q_3(5, 2), Q_4(3, 0)$, costruire un omeomorfismo tra $\prod(P_1, P_2, P_3)$ e $\prod(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.

7. Dimostrare che le topologie j_d e j_s su $\mathbb{R}$ sono omeomorfe.

8. Dimostrare che se X è un insieme infinito con la topologia cofinita ogni aperto non vuoto è denso.

9. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico separabile. Siano $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}''$ due topologie su X tali che $\mathcal{T}' < \mathcal{T} < \mathcal{T}''$.
   (a) Dimostrare che $(X, \mathcal{T}')$ è separabile;
   (b) verificare con un esempio $(X, \mathcal{T}'')$ può non essere separabile.

10. Siano $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ due spazi topologici metrizzabili. Se X ed Y sono insiemi con almeno due elementi, verificare che $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2$ non è una topologia su $X \times Y$.

11. Dimostrare che lo spazio topologico euclideo $(\mathbb{R}^2, \varepsilon)$ verifica il 2° assioma di numerabilità, provando che l'insieme (numerabile) di dischi euclidei $\mathfrak{D} := \{D_h(q), \forall\, q \in \mathbb{Q}^2, h \in \mathbb{Q}, h > 0\}$ è una base di ε.