Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE220
Appello C – 26 gennaio 2012

Esercizio 1 (10 punti). Sia $\mathcal{F}$ la topologia su $\mathbb{R}$ generata dagli aperti del tipo $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea.

1. Confrontare $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$.
2. Descrivere $Fr([0,1])$ e $Int([0,1])$ rispetto a $\mathcal{F}$.
3. descrivere la topologia di sottospazio di $[0,1]$ rispetto a $\mathcal{F}$.
4. determinare se l'applicazione $f : (\mathbb{R}, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ data da $f(x) = x+1$ è continua o meno. Vale la stessa risposta per una qualunque applicazione lineare non costante? Vale la stessa risposta per $f : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{F})$ dove f è definita nello stesso modo?

Esercizio 2 (15 punti). Sia $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 = 1\ \ z \in [0,1] \cup [2,3]\}$ dotato della topologia indotta da quella euclidea e sia r la relazione di equivalenza generata da:

$$\begin{aligned} x = x',\ y = y',\ z = z' \ &\Rightarrow\ (x,y,z)\, r\, (x',y',z') \\ x = x',\ y = y,'\ z = 0,\ z' = 3 \ &\Rightarrow\ (x,y,z)\, r\, (x',y',z') \\ x = x',\ y = y',\ z = 1,\ z' = 2 \ &\Rightarrow\ (x,y,z)\, r\, (x',y',z') \end{aligned}$$

Sia inoltre $Y = X_{/r}$.

1. X e Y sono compatti? Sono Hausdorff? Sono varietà topologiche?
2. calcolare $\pi_1(X, \{1,0,0\})$ e $\pi_1(X, \{1,0,2\})$
3. calcolare $\pi_1(Y, y)$ in funzione di y.

(suggerimento: dare un omeomorfismo tra Y ed una superficie con caratteristica di Eulero 0)

Esercizio 3 (7 punti). Classificare, in funzione di n, la seguente superficie:

$$A_n\ =\ a_1 b_1 b_1^{-1} a_1 \ldots a_n b_n b_n^{-1} a_n$$

Determinare per quali valori di n esiste più di una superficie con la stessa caratteristica di Eulero di A_n e dare un poligono etichettato che rappresenti tali superfici.