Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzioni tutorato di Ge110-18 Maggio 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

SOLUZIONI TUTORATO 9
18 MAGGIO 2011

1. Per vedere se puó esistere un'applicazione del genere cerco una base del nucleo dell'ipotetica $f \Rightarrow Ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z = 2z = 0\}$, quindi un vettore tipo del nucleo sará della forma $(-2y, y, 0, t)$, con $y, t \in \mathbb{R}$, da cui deduciamo che $dim(Ker(f)) = 2 \Rightarrow dim(Im(f)) = 2$, per il teorema della nullitá piú rango. Dunque non puó esistere un'applicazione suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, in quanto la dimensione dell'immagine é in ogni caso minore della dimensione del codominio.

2. La matrice A è definita a meno 4 parametri quindi per definirla univocamente avremmo bisogno di 4 equazioni nelle incognite $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Queste equazioni ci sono fornite dalle condizioni che l'esercizio inpone su A: Una ci è data dal fatto che l'applicazione associata ad A non debba essere suriettiva quindi non debba avere immagine di dimensione tre cioé A non debba avere rango max ($det(A) = 0$).
Altre tre ci sono date dal fatto che il vettore di componenti $(1, 1, 1)$ debba essere mandato da f nel vettore di componenti $(2, 2, 0)$. Imposto qundi il seguente sistema: $\begin{cases} det(A) = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$
$$\begin{cases} 3x + 2y + 7z - 2xt + yt = 0 \\ x = -1 \\ y = 3 \\ z + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = -4 \\ t = 5 \end{cases}.$$

3. Determiniamo la matrice associata all'operatore ponendo per colonne prima l'immagine del vettore di componenti $(1, 0, 0)$ poi quella del vettore di componenti $(0, 1, 0)$ ed infine quella del vettore di componenti $(0, 0, 1)$ ottenendo $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, a questo punto possiamo rispondere alle domande.

   (a) f non è suriettivo perché lo spazio di arrivo ha dimensione tre mentre $dim(im(f)) = rank(M(f)) = 2$. Per trovare il vettore cercato prendo le prime due colonne della matrice come base dell'immagine di f (dato che $dim(im(f)) = 2$)) e genero un vettore linearmante indipendente da queste come ad esempio $(0, 1, 0)$. Fatto.

   (b) L'operatore non é iniettivo perché la sua matrice rappresentativa ha rango inferiore alla dimensione dello spazio di partenza.

Per trovare i vettori cercati mi genero un vettore del kernel non nullo attraverso il sistema $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ottenendo ad esempio $k = (1, -1, -1)$. Quindi abbiamo che $f(v) = f(v + k)$ ma $v \neq v + k$ per $\forall v \notin ker(f)$.

(c) $f(E)$' è il sottospazio $< f(v), f(w) >=< \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$, quindi dopo aver verificato che i due vettori siano l.i. controllo il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ottenendo che é diverso da 0 e quindi $x \notin f(E)$.

4. Mettiamo per colonna le componenti delle immagini dei vettori della base per generare la matrice rappresentativa di f, $M_v(f)$, ottenendo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow im(f) =< f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4) >=< v_1 - v_3, v_1 - v_3, v_1, \underline{0} >=$

$=< v_1 - v_3, v_1 >=< v_1, v_3 >=< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >.$

$ker(f) =$ soluzioni di: $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$

$=< v_1 - v_2, v_4 >=< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

5. Innanzi tutto: $M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ quindi:

NB: le 'grandi parentesi quadre' attorno ai sistemi lineari stanno per 'soluzione/i di:'

(a) $ker(g \circ f) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} >.$

$im(g \circ f) =< g \circ f(e_1), g \circ f(e_2), g \circ f(e_3), g \circ f(e_4) >=< \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} >=$

$=< \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} >$

(b) $H = < \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} >$ quindi, chiaramente, $H \cap ker(g \circ f) =$

$$= < \begin{pmatrix}1\\2\\6\\0\end{pmatrix} >.$$

(c) $K = < \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} >$. Quindi $g \circ f(H) =$

$$= < g\circ f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, g\circ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, g\circ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} > =$$

$$= < \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} >.$$

$$(g \circ f)^{-1}(K) = (g \circ f)^{-1}(K \cap im(g \circ f)) = (g \circ f)^{-1}\left(< \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix} > \right) =$$

$$= < \left[\begin{pmatrix}2 & 5 & -2 & 3\\0 & 3 & -1 & 2\\-4 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix} \right] > \oplus ker(g \circ f) =$$

$$= < \begin{pmatrix}0\\-1\\-5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\\0\\6\end{pmatrix} >$$

6. $B_1 = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,3)\}$
$B_2 = \{(4,3,1),(0,1,2),(1,0,1)\}$
Per calcolare la matrice del cambiamenti di base P utilizzo la formula del cambiamento di base:
$P = M_{B_2,B_1}(\mathbb{I}) = M_{B_2,e}(\mathbb{I})M_{e,B_1}(\mathbb{I}) = (M_{e,B_2}(\mathbb{I}))^{-1}M_{e,B_1}(\mathbb{I}) \Rightarrow$
$M_{e,B_2}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\3 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, da cui ricavo l'inversa:
$M_{B_2,e}(\mathbb{I}) = (M_{e,B_2}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-3 & 3 & 3\\5 & -8 & 4\end{pmatrix}$;
$M_{e,B_1}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 3 & 3\end{pmatrix}$
Ora mi basta sostituire nella formula precedente per ottenere la matrice P:
$P = M_{B_2,B_1}(\mathbb{I}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-3 & 3 & 3\\5 & -8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 3 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\3 & 15 & 6\\1 & -4 & 17\end{pmatrix}$.

Per determinare Q si puó sia ragionare in maniera del tutto analoga, sia utilizzare il fatto che:
$Q = M_{B_1,B_2}(\mathbb{I}) = (M_{B_2,B_1}((I)))^{-1}$
N.B. La relazione precedente vale solo per le matrici di cambiamento di base in quanto la f.ne a cui sono associate é l'identitá.
In questo caso conviene procedere come prima in quanto mi manca solo da calcolare una matrice, mentre P ha componenti abbastanza grandi e trovare l'inversa é contoso. $M_{B_1,e}(\mathbb{I}) = (M_{e,B_1}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$Q = M_{B_1,B_2}(\mathbb{I}) = M_{B_1,e}(\mathbb{I})M_{e,B_2}(\mathbb{I}) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 31 & -1 & 4 \\ -5 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Le varie matrici si calcolano utilizzando le stesse formule usate in precedenza:
$M_{e,B_1}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M_{B_1,e}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
$M_{e,B_2}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $M_{B_2,e}(\mathbb{I}) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
$M_{B_1,B_2}(\mathbb{I}) = M_{B_1,e}(\mathbb{I})M_{e,B_2}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
$M_{B_2,B_1}(\mathbb{I}) = M_{B_2,e}(\mathbb{I})M_{e,B_1}(\mathbb{I}) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

8. (a) Ricordiamo che se la base d'arrivo é la base canonica le componenti del vettore immagine saranno proprio le sue coordinate risp. la base:
$$\begin{cases} f(e_1) = f((1,0,0,0)) = (1,0,1) \\ f(e_2) = f((0,1,0,0)) = (2,1,2) \\ f(e_3) = f((0,0,1,0)) = (0,-3,1) \\ f(e_4) = f((0,0,0,1)) = (-1,0,1) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Per verificare che C é una base di $\mathbb{R}^3$ mi basta verificare che i tre vettori che appartengono a C siano lin. indipendenti (il fatto che generano tutto lo spazio deriva dal fatto che sono tre vettori lin. ind. in uno spazio di dimensione 3); mi basta dunque verificare che la matrice che ha come righe i vettori di C abbia rango massimo e quindi determinante non nullo.

In effetti $\Rightarrow Det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4$, quindi C é una base.

(c) Per completare i due vettori proposti in una base basta prendere altri due vettori in $\mathbb{R}^4$ t.c. l'insieme dei quattro vettori genera tutto lo spazio (infatti se ho 4 vettori che mi generano uno spazio di dimensione 4 ho gratis che sono lin. ind.); scelgo $\underline{w} = (0,0,1,0)$ e $\underline{s} = (0,0,0,1) \Rightarrow$
$B = \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{s}\}$ é una base.

(d) Utilizzo la formula del cambiamento di base:
$M_{C,B}((f)) = (M_{E,C}(\mathbb{I}))^{-1} M_{E,e}(f) M_{e,B}(\mathbb{I})$, dove:

$M_{E,e}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, giá calcolata prima;

$M_{E,C}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $(M_{E,C}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

$M_{e,B}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ora basta sostituire nella formula e si ottiene il risultato!!!

$$M_{C,B}((f)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 10 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 0 & -2 \\ -6 & 26 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & 13 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$