Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzioni tutorato di Ge110-4 Maggio 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

Soluzioni tutorato 7
4 Maggio 2011

N.B.: Si consiglia di ricontrollare i testi degli esercizi sul pdf online in quanto in fase di correzione sono stati trovati degli errori nel testo.

1. Data l'equazione cartesiana di un sottospazio affine per trovare l'equazione parametrica associata ci basta risolvere l'equazione cartesiana imponendo k parametri liberi. (dove k=(dimensione spazio ambiente)-(# equazioni lin. indip.))
   Le soluzioni trovate sono:
   $$\begin{cases} x = -4-7t \\ y = 2+2t \\ z = t \end{cases} ; \begin{cases} x = \frac{3}{7} - \frac{1}{7}t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = -u-v \\ y = v \\ z = u \end{cases} ; \begin{cases} x = -2v-3u+4 \\ y = v \\ z = u \end{cases} .$$

2. Data l'equazione parametrica di un sottospazio affine per trovare l'equazione cartesiana associata dobbiamo fare due passaggi:
   i)ci calcoliamo la giacitura del sottospazio ed un suo punto noto: la giacitura si ottiene mettendo, volta per volta; in colonna i coefficenti di un parametro, mentre il punto noto si ottiene mettendo in colonna i termini noti delle tre equazioni.
   ii) una volta nota la giacitura $\{V, U\}$ o $\{V\}$ e il punto noto W per ottenere l'equazione cartesiana della retta basta imporre che la matrice:
   $$\begin{pmatrix} x-W_1 & V_1 & U_1 \\ y-W_2 & V_2 & U_2 \\ y-W_3 & V_3 & U_3 \end{pmatrix} \text{ o, rispettivamente, } \begin{pmatrix} x-W_1 & V_1 \\ y-W_2 & V_2 \\ y-W_3 & V_3 \end{pmatrix}$$
   non abbia rango massimo.
   Le soluzioni trovate sono:
   $$-x-y+z-2=0 \; ; \begin{cases} 7x-3y-4=0 \\ 9x-3z-6=0 \end{cases} ; -3x+3y+2z-1=0.$$

3. Risolvere un sistema lineare significa fondamentalmente trovare le equazioni cartesiane dello spazio delle soluzioni il quale risulta essere un sottospazio affine di dimensione $n-k$ in $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ (dove n è il rango massimo della matrice e k il rango effettivo della matrice). In questo senso l'esercizio è identico al primo.
   Le soluzioni trovate sono:
   $$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{t}{4} \\ y = 1 + \frac{t}{2} \\ z = t \end{cases} .$$

4. Dati n punti $\{P_1, \ldots, P_n\} \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ per trovare il sottospazio minimo che li contiene ne scegliamo uno: P_i, e imponiamo che questo sia il nostro punto noto, poi, otteniamo la giacituira nel seguente modo:

Giacitura $=< \{P_j\}_{j\neq i} >$. Infine si prosegue nel calcolare le equazioni parametriche e cartesiane nel modo usuale.
Le soluzioni trovate sono:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \right\}, \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-5\\-2\end{pmatrix} \rangle \right\}, \begin{cases} x = 1+u-2v \\ y = 2+3u-5v \\ z = 1+u-2v \end{cases}, z-x=0$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \rangle \right\}, \begin{cases} x = u+3v \\ y = 2u+2v \\ z = 3u+v \end{cases}, 4x-7y+4z=0.$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} \rangle \right\}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+3u+4v \\ z = 1+u+2v \end{cases}, x-1=0.$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} \rangle \right\}, \begin{cases} x = 4t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases}, \begin{cases} x-2y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}.$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \right\}, \begin{cases} x = 3u+2v \\ y = 1+2u+v \\ z = 1+6u+v \end{cases}, -2x+6y-z+1=0.$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} \rangle \right\}, \text{il s.s. minimo è tutto } \mathbb{A}^3(\mathbb{R}).$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \right\}, \begin{cases} x = 1-u+3v \\ y = u+v \\ z = u \end{cases}, -x+3y-4z+1=0.$$

5. Per risolvere questo esercizio bisogna confrontare le giaciture della retta e dei sottospazi per determinare il parallelismo o il non parallelismo, in seguito mettiamo a sistema le equazioni cartesiane per determinare i punti di incidenza... queste due informazioni sono sufficenti per determinare la posizione reciproca dei sottospazi.
   Le soluzioni trovate sono:
   A e r sono coincidenti.
   B e r sono incidenti nel punto $(1, 1, 1)$
   C e r sono incidenti nel punto $(1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$
   D contiene r

6. Questo esercizio si risolve come quello di prima, le soluzioni trovate sono:
   A e p sono incidenti nel punto $(1, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$
   B e p sono incidenti lungo la retta $\begin{cases} x = t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}$
   C e p sono paralleli

D e p sono incidenti lungo la retta $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases}$

7. Per quanto riguarda il primo punto abbiami gratis tutte le informazioni necessarie per determinare le equazioni parametriche del piano cercato che risulta essere passante per A ed avere giacitura $< u, v >$.
   Per quanto riguarda il secondo punto scegliamo B come punto noto ed otteniamo che la giacitura del piano è $< (3, 1, 0), w >$ e possiamo procedere nel calcolare l'equazione cartesiana in maniera usuale. Le soluzioni trovate sono:
   (a) $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
   (b) $x - 3y + 3 = 0$.

8. • $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$
   • $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}$, $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$.

9. Calcoliamo la loro giacitura v e verifichiamo quindi che sono parallele poi ci calcoliamo due punti R e S rispettivamente appartenenti a r e s e calcoliamo l'equazione del piano passante per R e di giacitura $< v, S - R >$. Le soluzioni trovate sono: $R = (0, 0, 1), S = (1, 2, 0)$ e $E : y + 2z = 0$.