**Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Soluzione tutorato di Ge110-30 Marzo 2011

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi**
**Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri**

TUTORATO 4
30 MARZO 2011

1. 
   - $dim(U) = dim(V) = 2 \Rightarrow$ Supponiamo per assurdo che $dim(U \cap V) = 0 \Rightarrow$ Per la formula di Grassmann vettoriale ho che $dim(U \oplus V) = 4 \Rightarrow$ Ne segue l'assurdo in quanto $U \oplus V$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e non può avere dimensione maggiore dello spazio ambiente.
   - Sfrutto la formula di Grassmann e ne deduco che ci sono due possibilitá:
     $dim(U \cap V) = 2 \Rightarrow$ in questo caso $U$ e $V$ sono coincidenti, quindi basta esibire un esempio di due spazi di dimensione 2 uguali;
     $dim(U \cap V) = 1 \Rightarrow U :=< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$ e $V :=< (1, 0, 0), (0, 0, 1) >$.

2. $W_1$ é il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dalle soluzioni del sistema omogeneo:
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow dim(W_1) = 3$ per Rouché Capelli $\Rightarrow$ basta trovare tre vettori di $W_1$ linearmente indipendenti per stabilirne una base $\Rightarrow$ Il vettore tipo di $W_1$ é dato da: $(x_1, 2x_1 - x_3, x_3, 3x_5, x_5)$ dove le relazioni tra le coordinate sono quelle ricavate dal sistema precedente $\Rightarrow$ Devo dare un valore alla variabili libere del vettore tipo in modo da ottenere tre vettori lin. ind. che appartengano sicuramente a $W_1 \Rightarrow$ Mi basta porre una coordinata uguale a 1 e porre le altre due uguali a 0 $\Rightarrow$ In questo modo genero i tre vettori: $(1, 2, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 3, 1)$ ;$\Rightarrow$
Questi sono tre vettori lin. ind. in uno spazio di dimensione 3 $\Rightarrow$ Costituiscono una base per tale spazio.
In maniera analoga alla precedente ricavo che $dim(W_2) = 4$ e che:
$W_4 :=< (1, 2, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 4, 0, 1, 0), (0, 4, 0, 0, 1) >\Rightarrow$ Ne segue subito che la somma dei due sottospazi non puó essere diretta per Grassmann $\Rightarrow$ Voglio calcolarmi la dimensione dell'intersezione; per farlo prima calcolo quella della somma e poi quella dell'int. sfruttando Grassmann $\Rightarrow$ la dimensione di $W_1 + W_2$ 'e uguale al rango dell'insieme dei sette vettori che costituiscono le basi dei due sottospazi$\Rightarrow$ Applico il metodo di Gauss-Jordan alla matrice dei vettori riga e provo a ridurla a gradini $\Rightarrow$ In questo modo il numero di righe che non si cancellano sará uguale al rango per righe della matrice (che per costruzione é il rango che cercavo)$\Rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la quarta riga si cancella in quanto uguale alla prima;
$\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&3&1\\0&0&2&0&0\\0&0&4&1&0\\0&0&4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&3&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ A questo punto la terza riga é combinazione lineare della quinta e della sesta $\Rightarrow$ La posso cancellare $\Rightarrow$ Riducendo a scalini la matrice,mi rimangono cinque righe $\Rightarrow dim(W_1 + W_2) = 5 \Rightarrow dim(W_1 \cap W_2) = 2$ per Grassmann.

3. • Per prima cosa vediamo com'é un elemento tipo di $F \Rightarrow$.
Se $X \in F \Rightarrow AX = XA \Rightarrow AX = \begin{pmatrix}6&-9\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6x-9z&6y-9t\\4x-6z&4y-6t\end{pmatrix}$
$XA = \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-9\\4&-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6x+4y&-9x-6y\\6z+4t&-9z-6t\end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ Per il principio d'identitá fra le matrici eguaglio componente per componente e ottengo il sistema:
$\begin{cases}6x-9z=6x+4y\\6y-9t=-9x-6y\\4x-6z=6z+4t\\4y-6t=-9z-6t\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=(-9/4)z\\x=3z+t\end{cases} \Rightarrow$
$F := \{X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) | X = \begin{pmatrix}3z+t&(-9/4)z\\z&t\end{pmatrix}$,con $z, t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$
$F$ é un sottogruppo in quanto contiene il vettore nullo (per $t = z = 0$) ed é chiuso rispetto la somma e il prodotto per scalari.
In particolare si é risolto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite, in cui peró due equazioni erano dipendenti dalle altre due $\Rightarrow dim(F) = 2$ per Rouché-Capelli $\Rightarrow$ Per trovare una base basta trovare due matrici $\in F$ indipendenti $\Rightarrow$ Basta azzerare $t$ e porre $z = 4$, e poi fare la stessa cosa a variabili invertite(ma con $t = 1$). In questo modo $\Rightarrow F =< \begin{pmatrix}12&-9\\4&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} >$
Per trovare il vettore tipo di $G$ si ragiona in modo analogo fino ad ottenere le relazioni:
$\begin{cases}x=-t\\y=(9/4)z+3t\end{cases} \Rightarrow$ Per Rouché-Capelli $dim(G) = 2$ e una sua base é data dalle matrici: $\{\begin{pmatrix}-1&3\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&9\\4&0\end{pmatrix}\}$.

• Per determinare una base di $F+G$ considero le matrici quadrate di ordine 2 come un vettore in $\mathbb{R}^4$, prestando particolare attenzione all'ordine delle componenti $\Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&1\\12&-9&4&0\\-1&3&0&1\\0&9&4&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-9&4&-12\\0&3&0&2\\0&9&4&0\end{pmatrix} \rightarrow$
$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&3&0&2\\0&0&4&-6\\0&0&4&-6\end{pmatrix} \Rightarrow dim(F + G) = 3$e in partcolare $F + G :<$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 9\\ 4 & 0\end{pmatrix} >\Rightarrow dim(F \cap G) = 1$ per la formula di Grassmann $\Rightarrow$ Basta trovare un vettore non nullo appartenente a entrambi i sottospazi di $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ per avere una base dell'intersezione $\Rightarrow$ Se $v \in F$ e $v \in G \Rightarrow v$ puó essere scritto come combinazione lineare di entrambe le basi $\Rightarrow v = a(1,0,0,1) + b(12,-9,4,0)$ e $v = c(-1,3,0,1)+d(0,9,4,0) \Rightarrow a(1,0,0,1)+b(12,-9,4,0) = c(-1,3,0,1)+ d(0,9,4,0)$ da cui ricavo il sistema: $\begin{cases} a+12b=-c\\ -9b=3c+9d\\ 4b=4d\\ a=c\end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=c\\ b=d\\ a=-6b\end{cases} \Rightarrow$

$(F \cap G) \ni v := -6(1,0,0,1) + 1(12,-9,4,0) = -6(-1,3,0,1) + 1(0,9,4,0) = (6,-9,4,-6)$.

- Se la matrice $C \in (F+G) \Rightarrow$ Deve essere espressa come combinazione lineare dei vettori della base di $F+G \Rightarrow$ Vedo per quali valori di $h$ questa condizione é soddisfatta$\Rightarrow C := \begin{pmatrix}0 & h-2\\ 0 & h-3\end{pmatrix} =$

  $a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, c\begin{pmatrix}0 & 9\\ 4 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$ Ottengo il sistema: $\begin{cases} a=b\\ 3b+9c=h-2\\ 4c=0\\ a+b=h-3\end{cases} \rightarrow$

  $\begin{cases} a=b=1\\ c=0\\ h=5\end{cases} \Rightarrow$ Per $h=5$ la matrice $C \in (F+G)$.

- La somma $F+G$ noné diretta $\Rightarrow$ Possono esserci più modi per esprimere una stessa matrice come somma di una matrice di $F$ e di una matrice di $G \Rightarrow$ In questo caso per costruzione $C := 1(1,0,0,1) + 1(-1,3,0,1) \Rightarrow$ Basta porre $C_1 := (1,0,0,1) \in F$ e $C_2 := (-1,3,0,1) \in G$.

4.
- Con un procedimento analogo a quello svolto nell'esercizio 2 noto che $dim(H) = 2$ e trovo il vettore tipo di $H$ esplicitando $x_3$ e $x_4$ in funzione delle altre due variabili $(x_1, x_2, x_2-2x_1, x_1+x_2) \Rightarrow$ Ottengo i due vettori lin. ind. che mi generano $H$ e che dunque ne costituiscono una base $\{(1,0,-2,1),(0,1,1,1)\}$.
  $K$ é generato da due vettori linearmente indipendenti $\Rightarrow dim(K) = 2$ e tali vettori ne costituiscono una base.
- Per calcolare la dimensione di $H+K$ mi basta vedere qual é il rango dell'insieme dei vettori contenuti nelle basi di $H$ e di $K \Rightarrow$ Vado a studiarmi la matrice dei vettori riga per calcolare il rango per righe di tale matrice (che sará la dimensione dello spazio che sto cercando):
  $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-2&1\\0&1&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&-1&-2&1\\0&1&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow dim(H{+}K) = 4 \Rightarrow dim(H\cap K) = 0$ per la formula di Grassmann $\Rightarrow$ La somma é diretta.

5. - Con procedimenti analoghi a quelli utilizzati negli esercizi precedenti $\Rightarrow dim(H) = 2$ e che un suo elemento di é del tipo $(-2y, y, z, 0)$, e quindi per trovare una base di $H$ mi basta trovare due suoi vettori linearmente indipendenti $\Rightarrow$ Una base di $H$ é $\{(-2,1,0,0),(0,0,1,0)\}$. Per calcolare la dimensione di $K$ mi basta vedere qual é il numero di vettori lin. ind. tra quelli che generano il sottospazio cioè Il rango della seguente matrice: $\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&4&-1&1\\0&0&1&1\\1&2&4&4\\1&-1&0&5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&-1&-1\\0&0&1&1\\0&0&4&4\\0&-3&0&4\end{pmatrix} \Rightarrow$
Cancello seconda e quarta riga in quanto multipli della terza e ottengo che il rango della matriceé uguale a $3 \Rightarrow dim(k) = 3 \Rightarrow$ Mi basta trovare tre vettori lin. ind. che appartengono a $K$ e ottengo una sua base; in questo caso $\Rightarrow K :=< (1,2,0,1),(0,0,1,1),(1,-1,0,5) >$.

   - La $dim(H + K)$ é il rango della matrice che ha per righe i vettori delle due basi $\Rightarrow$
$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\1&-1&0&5\\-2&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&-3&0&4\\0&5&0&2\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&-3&0&4\\0&0&0&26/3\\0&0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$
La quarta riga é un multiplo dell'ultima e scambiando la seconda riga con la terza otteniamo un sistema a gradini $\Rightarrow dim(H + K) = 4 \Rightarrow dim(H \cap K) = 1$ per Grassmann; In particolare $H + K = \mathbb{R}^4$ poiché hanno stessa dimensione $\Rightarrow$ Una base di $H + K$ é la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Poiché $dim(H \cap K) = 1$ basta trovare un vettore non nullo che appartenga a entrambi i sottosp. per ottenere una base $\Rightarrow$ Se un vettore $v$ appartiene a entrambi $\Rightarrow$ Puó essere scritto come combinazione lineare di entrambi le basi $\Rightarrow v = a(-2,1,0,0) + b(0,0,1,0)$; $v = c(1,2,0,1) + d(0,0,1,1) + e(1,-1,0,5)$. Applicando la proprietà transitiva otteniamo le seguenti relazioni che mettiamo a sistema:
$\begin{cases}-2a = c + e\\a = 2c - e\\b = d\\0 = c + d + 5e\end{cases} \rightarrow \begin{cases}e = 5c\\a = -3c\\b = d = -26c\end{cases} \Rightarrow$ Pongo $c = -1$ e ottengo il seguente vettore che é anche base di $H \cap K \Rightarrow v := a(-2,1,0,0) + b(0,0,1,0) = -3c(-2,1,0,0) - 26c(0,0,1,0) = (-6,3,26,0)$.

   - Poiché la somma tra $H$ e $K$ non é diretta puó esistere piú di un modo per scrivere il vettore $u := (1,2,3,4)$ come somma di un vettore di $H$ e di un vettore di $K$;In particolare: $u \in K$; infatti $u = 1(1,2,0,1) + 4(0,0,1,1) + 0(1,-1,0,5)$

$\Rightarrow$ Una possibile maniera per scrivere $u$ é: $u = (1,2,3,4) \in K + (0,0,0,0) \in H$

6. Osserviamo innanzitutto che tutte queste matrici hanno rango al piú tre. Con il metodo di eliminazione di Gauss (per righe), troviamo:

- $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango due.
- $B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 22 & 10 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango due.
- $C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango due.
- $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -7/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango tre.