Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110- 9 Marzo 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

Tutorato 1
9 Marzo 2011

1. Dato un campo $\mathbb{K}$, dimostrare che $\mathbb{K}^n$ ha la struttura di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
2. Dimostrare che $\mathbb{K}[x]$, l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ é un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
3. Dare un esempio di due matrici quadrate di ordine 3 il cui prodotto sia la matrice nulla.
4. Dimostrare che se una matrice quadrata é nilpotente allora non puó essere invertibile.
5. Mostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é nilpotente di ordine 3.
6. Sia $C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, svolgere le seguenti operazioni:
   a) $iC^2 + 3C^{-1} + \mathbb{1}i$
   b) $3C^2 + 7C^3$
   c) C^tC
7. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
   Calcolare se possibile:
   a) $A^t, C^t, A \cdot C, A^t \cdot C, A^t \cdot C^t, C^t \cdot A^t$.
   b) $A \cdot C \cdot D, 3(A \cdot C + B)D^2$.
8. Trovare per ognuna delle seguenti matrici A una matrice M tale che:
   - il prodotto matriciale (righe per colonne) $A \cdot M$sia ben definito.
   - $A \cdot M = 0$ (matrice nulla).

   $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 15 \\ 10 & 2 & 30 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.