Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Seconda prova di valutazione in itinere – 1 Giugno 2011

Esercizio 1. (15 Pt.) Sia $\mathcal{A} := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$.

(i) Dopo aver verificato che $\mathcal{B} := \{\mathbf{x} + 2\mathbf{z}, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y} + \mathbf{z}\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$, si consideri l'endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tale che

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2h^2+1 & 1 & h^2 \\ 0 & h & h \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si determinino i valori di $h \in \mathbf{R}$ per i quali φ non è surgettivo, e per ciascuno di tali valori di h si esibisca una base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e una base di $\mathrm{Im}(\varphi)$. [Potrebbe essere utile calcolare $M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\varphi)$... ☺].

(ii) Al variare di $h \in \mathbf{R}$, si discuta la diagonalizzabilità di φ. Nel caso $h = 2$, si esibisca, se esiste, una base di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di φ, e si calcoli $M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\varphi^{2011})$.

(iii) Nel caso $h = 1$, si determini, se esiste, un sottospazio Y di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2 contenente $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ tale che $\varphi(Y) \subseteq Y$.

Esercizio 2. (10 Pt.) Si consideri lo spazio affine $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ e siano (x, y, z) le coordinate del generico punto di $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ rispetto al riferimento affine canonico. Si considerino il piano $\mathcal{P}$ di equazione cartesiana $x + 3y + 1 = 0$ e, per ogni $h \in \mathbf{R}$, la retta $\mathcal{R}_h$ di equazioni parametriche $x = 1 + ht, y = 2 - t, z = 0$.

(i) Si determini l'unico valore $h^\star$ di h per cui $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}_h$ sono paralleli.

(ii) Si esibisca un'equazione cartesiana del piano contenente $\mathcal{R}_{h^\star}$ e parallelo a $\mathcal{P}$.

(iii) Si determinino tutti e soli i punti P della retta di equazioni cartesiane $x = y - 1 = 0$ tali che la retta per P e $(-1, 0, 1)$ sia complanare con $\mathcal{R}_{h^\star}$.

Esercizio 3. Si risolvano le seguenti questioni.

(i) (2 Pt.) Esiste un endomorfismo $f : M_{2011}(\mathbf{R}) \longrightarrow M_{2011}(\mathbf{R})$ tale che $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$?

(ii) (3 Pt.) In uno spazio affine di dimensione 4 si trovino, se esistono, un piano e una retta che siano sghembi.

(iii) (4 Pt.) Siano K un campo, X un $K-$spazio vettoriale di dimensione 2 e $\varphi : X \longrightarrow X$ un endomorfismo che non è un'omotetia. Si dimostri che esiste un vettore $\mathbf{x} \in X$ tale che $\{\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})\}$ è una base di X.

Cenni alla soluzione

Esercizio 1. Si ha

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\varphi) = M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\mathrm{Id}) = M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\varphi)[M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\mathrm{Id})]^{-1} = \begin{pmatrix} 2h^2+1 & 1 & h^2 \\ 0 & h & h \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & h^2 \\ 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

φ non è surgettivo se, e soltanto se, $h \in \{0, 1, -1\}$. Per $h = 0$, una base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è $\{\mathbf{y}\}$, mentre una base di $\mathrm{Im}(\varphi)$ è $\{\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{z}\}$. Per $h \in \{1, -1\}$, una base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è $\{\mathbf{x} - \mathbf{z}\}$, mentre una base di $\mathrm{Im}(\varphi)$ è $\{\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}\}$. Il polinomio caratteristico di φ è $p(T) := (h - T)(1 - h - T)(1 + h - T)$. Per $h \in \mathbf{R} - \{0, 1/2\}$, φ ha 3 autovalori semplici ed è diagonalizzabile. Per $h = 1/2$, φ ha $1/2$ come autovalore di molteplicità algebrica 2. Si ha immediatamente

$$A(1/2) := M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\varphi - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Dunque la molteplicità geometrica di $1/2$ è 2, avendo la matrice $A(1/2)$ manifestamente rango 1. Segue che, per $h = 1/2$, φ è diagonalizzabile. Per $h = 0$, 1 è autovalore doppio di φ. Poiché la matrice

$$A(1) = M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\varphi - \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, segue che l'autospazio associato all'autovalore 1 ha dimensione 1. Dunque, φ è diagonalizzabile se, e soltanto se, $h \in \mathbf{R} - \{0\}$. Per $h = 2$, come appena visto, φ è diagonalizzabile, avendo i 3 autovalori semplici $-1, 2, 3$. Una base di autovettori è $\mathcal{C} := \{-2\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}, 2\mathbf{x} + \mathbf{z}\}$. Poniamo

$$P := M_{\mathcal{A}\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\varphi) = PM_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\varphi)P^{-1}$. Dunque $M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\varphi^{2011}) = M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\varphi)^{2011} = PM_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\varphi)^{2011}P^{-1}$. Per $h = 1$, un sottospazio Y di dimensione 2 contenente $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ e tale che $\varphi(Y) \subseteq Y$ è $Y :=< \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} >$.

Esercizio 2. Il valore $h^\star$ di h per cui il piano $\mathcal{P}$ è parallelo alla retta $\mathcal{R}_{h^\star}$ è $h^\star = 3$. Come dovrebbe essere ben noto, i piani $\mathcal{Q}_\alpha$ di equazione $x + 3y + \alpha = 0$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) sono tutti e soli i piani paralleli a $\mathcal{P}$. Stante [1, Proposizione 8.4], il piano parallelo a $\mathcal{P}$ e contenente $\mathcal{R}_3$ sarà ottenuto per il valore di α per cui $\mathcal{Q}_\alpha \cap \mathcal{R}_3 \neq \emptyset$. Dunque, richiedendo che $A(1, 2, 0) \in \mathcal{Q}_\alpha$, si trova $\alpha = -7$. Il generico punto P della retta di equazioni cartesiane $x = y - 1 = 0$ è $P(0, 1, z)$ (per ogni $z \in \mathbf{R}$). Dunque, la giacitura della retta $\mathcal{S}_z$ ($z \in \mathbf{R}$) per P e $B(-1, 0, 1)$ è $< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z-1 \end{pmatrix} >$. Poiché $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la giacitura di $\mathcal{R}_3$ è $< \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >$, le rette $\mathcal{S}_z$ e $\mathcal{R}_3$ sono complanari se e soltanto se il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & z-1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è nullo, in virtù di [1, Proposizione 10.4]. Ciò avviene se, e soltanto se, $z = 1/2$.

Esercizio 3. (i) Se f esistesse si avrebbe, per il Teorema Nullità + rango, $2\dim(\mathrm{Ker}(f)) =$

$\dim(M_{2011}(\mathbf{R})) = 2011^2$, una contraddizione.

(ii) Basta considerare, in $\mathbf{A}^4_{\mathbf{R}}$, il piano di equazione $x = y = 0$ e la retta di equazioni cartesiane $x - 1 = z = t = 0$.

(iii) Supponiamo, per assurdo, che, per ogni $\mathbf{x} \in X$, l'insieme $\{\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})\}$ sia linearmente dipendente. A norma di definizione, segue che ogni vettore non nullo è un autovettore. Pertanto φ è un'omotetia, stante [1, Proposizione 13.8], una contraddizione.

Riferimenti bibliografici

[1] E. Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri, 2000.