**Università degli Studi di Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011**
**GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare**
**Prima prova di valutazione in itinere – 14 Aprile 2011**

**Esercizio 1.** (13 Pt.) Si discuta la compatibilità del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X+ \;\; 2Y+ \;\; Z = \;\; 0 \\ -X+ \;\; Y+ \;\; tZ = \;\; t \\ 2X+ \;\; 3Y+ \;\; Z = \;\; -1 \\ \qquad Y+ \;\; Z = \;\; 2 \end{cases}$$

nelle indeterminate $X, Y, Z$, al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$.

**Esercizio 2.** (13 Pt.) Siano $X$ un $\mathbf{R}-$spazio vettoriale di dimensione 4, e $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}\}$ una sua base. Si ponga

$$Y :=< \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{t}, 2\mathbf{t} >_{\mathbf{R}} \qquad Z := \{a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} + d\mathbf{t} \in X : a + b + d = 0\}$$

(i) Dopo aver spiegato perché $Y, Z$ sono sottospazi vettoriali di $X$, si esibisca una base di $Y, Z, Y \cap Z, Y + Z$.

(ii) Si dimostri che $\mathcal{A} := \{\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}, \mathbf{z} - \mathbf{t}, \mathbf{t} - \mathbf{x}\}$ non è un insieme di generatori di $X$.

(iii) Dopo aver esibito una base di $T :=< \mathcal{A} >_{\mathbf{R}}$, si determini un supplementare di $T$ in $X$.

**Esercizio 3.** Si risolvano le seguenti questioni, con un argomento chiaro e conciso.

(i) (1 Pt.) Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si determini una collezione finita di matrici elementari il cui prodotto sia $A$.

(ii) (2 Pt.) Siano $K$ un campo, $A \in M_{2011,2}(K)$ la matrice le cui entrate sono tutte uguali a 1, $C := (c_{ij}) \in M_{2011}(K)$ la matrice tale che $c_{11} = c_{22} = 1$ e $c_{ij} = 0$, per ogni $(i, j) \neq (1, 1), (2, 2)$. Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste una matrice $B \in M_{2,2011}(K)$ tale che $AB = C$.

(iii) (2 Pt.) Siano $K$ un campo, $X$ un $K-$spazio vettoriale, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$. È vero che, se $\mathbf{z} \notin < \mathbf{x}, \mathbf{y} >_K$, allora $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >_K \cap < \mathbf{x}, \mathbf{z} >_K = < \mathbf{x} >_K$?

(iv) (3 Pt.) Siano $K$ un campo, $X$ un $K-$spazio vettoriale di dimensione $n$, e sia $m$ un intero positivo minore di $n$. Si provi che, se $X_1, \ldots, X_m$ sono $m$ iperpiani vettoriali di $X$ (i.e., sono sottospazi di dimensione $n - 1$), allora $\dim_K(X_1 \cap \ldots \cap X_m) \geq n - m$.