Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Appello X – 15 Settembre 2011

Esercizio 1. (13 Pt.) Nello spazio affine $\mathbf{A}^4_{\mathbf{R}}$ sia fissato il riferimento affine canonico, e siano (x, y, z, t) le coordinate del generico punto di $\mathbf{A}^4_{\mathbf{R}}$ rispetto a tale riferimento.

(i) Si determinino dimensione e una base della giacitura del sottospazio affine $\mathcal{S}$ di $\mathbf{A}^4_{\mathbf{R}}$ avente equazioni cartesiane

$$x + t - 1 = x - 3y - 2 = x - 9y - 2t - 4 = 0$$

(ii) Considerato l'iperpiano $\mathcal{I}$ di equazione cartesiana $(2 + h)x - 3y + (h - 1)z + 2t = 4$, con $h \in \mathbf{R}$, si trovi $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{I})$, per ogni valore di h per cui $\mathcal{S} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$.

(iii) Si trovi l'unico valore di h per cui $\mathcal{S}$ e $\mathcal{I}$ sono paralleli e per tale valore di h si precisi se $\mathcal{S} \cap \mathcal{I} = \emptyset$ o $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}$.

Esercizio 2. (12 Pt.) Siano T un'indeterminata su $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}[T]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale costituito da 0 e dai polinomi di grado al più 2, e $\mathcal{F} := \{1, T, T^2\}$ la sua base standard.

(i) Si determini una base $\mathcal{B}$ del sottospazio $V := \{f \in \mathbf{R}[T]_{\leq 2} : f(-1) = 0\}$ di $\mathbf{R}[T]_{\leq 2}$.

(ii) Per ogni $h \in \mathbf{R}$, sia $\varphi_h : \mathbf{R}[T]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbf{R}[T]_{\leq 2}$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}[T]_{\leq 2}$ tale che $\varphi_h(f(T)) := f(hT + 1)$ (per esempio, $\varphi_h(1 + T^2) = 1 + (hT + 1)^2$). Si scriva $M_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(\varphi_h)$ e si discuta la diagonalizzabilità di φ_h, al variare di $h \in \mathbf{R}$.

(iii) Si determini h in modo che la restrizione ψ di φ_h a V sia un endomorfismo di V, e si calcoli $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\psi)$.

Esercizio 3. Si risolvano le seguenti questioni, con un argomento chiaro e conciso.

(i) (3 Pt.) Siano K un campo e A una matrice quadrata a entrate in K tale che $A^5 = I$ (I denota la matrice identità). Si provi che almeno una delle matrici $A^2 - I$, $A^4 + A^3 + A^2 + A + I$ è non invertibile.

(ii) (3 Pt.) Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali, e siano T, U sottospazi di W. È vero che $f^{-1}(T + U) = f^{-1}(T) + f^{-1}(U)$? Perché?

(iii) (3 Pt.) Siano V uno spazio vettoriale e $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Se $-f : V \longrightarrow V$ denota l'endomorfismo opposto di f, si calcoli $\det(-f)$, in funzione di $\det(f)$.