Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Soluzioni del tutorato numero 8 (30 Aprile 2009)
Spazi affini di dimensione 3 e applicazioni lineari

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck
http://www.mat.uniroma3.it/

1. In generale si ha che tre punti $A, B, C \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sono allineati $\Leftrightarrow$

$$rg \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} \end{pmatrix} = 1$$

(a) In questo caso abbiamo che $\overrightarrow{AB} = (\frac{3}{2}, 2, 0)$ e $\overrightarrow{BC} = (\frac{3}{2}, 2, 0)$, ossia i vettori sono dipendenti. Possiamo quindi concludere che i punti sono allineati.

(b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 1)$ e $\overrightarrow{BC} = (1, -3, -1)$, quindi i punti non sono allineati. Per scrivere l'equazione parametrica del piano che contiene i tre punti basta imporre che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l's \\ y = y_0 + mt + m's \\ z = z_0 + nt + n's \end{cases}$$

dove (x_0, y_0, z_0) è un punto del piano (basta prendere uno tra A, B e C) e (l, m, n) e (l', m', n') sono una giacitura del piano (la giacitura sarà data proprio dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB}$). Quindi, in questo caso otteniamo

$$\begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = 1 + 2t - 3s \; z = 1 + t + s \end{cases}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana del piano basta imporre che

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0$$

In questo caso ricaviamo quindi

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 5(x-2)+2(y-1)+(z-1) = 5x+2y+z-13 = 0$$

(c) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -2)$ e $\overrightarrow{BC} = (m-1, m-1, -m+1)$, allora

$$rg \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m-1 & m-1 \end{pmatrix} = 0 \quad e \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ m-1 & -m+1 \end{pmatrix} = 0$$

e

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ m-1 & -m+1 \end{pmatrix} = 0$$

ossia se e soltanto se tutti i minori di ordine due sono uguali a zero. Dal sistema precedente otteniamo che i punti sono allineati $\Leftrightarrow m = 1$. Per scrivere le equazioni del piano che contiene i tre punti imponiamo per comodità $m = 0$ e otteniamo che le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - s \\ z = 1 - 2t + s \end{cases}$$

e quelle cartesiane

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -x - z + 2 = 0$$

(d) $\overrightarrow{AB} = (m-1, m-3, 0)$ e $\overrightarrow{BC} = (m-1, 4, -2)$, allora

$$rg\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} m-1 & m-3 \\ m-1 & 4 \end{pmatrix} = 0 \quad e \quad \det\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ m-1 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} m-3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

Dal sistema precedente si vede che non esistono valori di m tali che i tre punti siano allineati. Fissiamo nuovamente m=0 e otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = -3t + 4s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

e quelle cartesiane

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 6x - 2y - 7z + 1 = 0$$

2. (a) Per trovare un vettore di direzione della retta r basta imporre $\mathbf{w} = (l, m, n)$ dove

$$l = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad m = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad n = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendendo il punto $(-1, 1, 0)$ (andava bene un qualsiasi punto della retta) possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

(b) Sia A la matrice le cui righe sono determinate dai coefficienti dei piani che individuano le due rette r ed s, allora abbiamo che le due rette sono complanari (incidenti o parallele) se e soltanto se $\det(A) = 0$. In questo caso si vede che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

Possiamo quindi concludere che le rette r ed s sono sghembe.

(c) Innanzitutto notiamo che esiste un unico piano p' tale che p' contiene sia la retta r che il punto P (equivalentemente che esiste un unico piano p'' tale che p'' contiene sia la retta s che il punto P), inoltre i piani p' e p'' sono distinti (altrimenti r ed s sarebbero complanari) ed hanno un punto in comune, quindi $p' \cap p'' = t$ come richiesto. Quindi utilizzando il fascio proprio di piani di asse r, $\lambda(x+2z+1)+\mu(2x+y+3z+1) = 0$, imponendo il passaggio per il punto P otteniamo $4\lambda + 6\mu = 0$, scegliendo ad esempio $\lambda = -3$ e $\mu = 2$ (andavano bene due qualsiasi valori di λ e di μ che risolvevano l'equazione) troviamo il piano $p' : x + 2y - 1 = 0$; utilizzando un procedimento analogo con il fascio di piani di asse s, $\lambda(x+1)+\mu(2x+3y+1) = 0$ imponiamo il passaggio per il punto P e otteniamo $2\lambda+3\mu = 0$ allora $p'' : x + 6y - 1 = 0$. Allora le equazioni cartesiane di $t = p' \cap p''$

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x + 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

(d) Le equazioni parametriche di q sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$$

Scrivendo la matrice

$$\begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e annullando due qualsiasi dei suoi minori otteniamo le equazioni cartesiane di q:

$$\begin{cases} -x - y + 1 = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}$$

(e) Per vedere se le rette t e q sono parallele, incidenti o sghembe comincio con vedere il rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nota subito che $\det(B) = 0$, Inoltre si può vedere che la sottomatrice $B(123|123)$ è invertibile (ha rango massimo). Quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha un'unica soluzione (in altre parole le rette sono incidenti) e il punto di intersezione è il punto $(1, 0, 0)$.

3. (a) Utilizzando le stesse argomentazioni date in precedenza per scrivere le equazioni parametriche e cartesiane delle rette nello spazio affine 3-dimensionale reale abbiamo che le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 \\ z = -2 - t \end{cases}$$

e che annullando due minori della matrice

$$\begin{pmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

(b) Visto che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

abbiamo che le rette r ed s sono sghembe.

(c) Per scrivere l'equazione del piano richiesto basta osservare che, presi i vettori di giacitura della retta r (che è proprio $\mathbf{v}$ dato nel punto (a) dell'esercizio) e della retta s (che denotiamo con $\mathbf{w}$), il piano p' avrà come giacitura proprio i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} = (3, -3, -1)$, imponendo il passaggio per il punto Q otteniamo l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + t + 3s \\ y = -1 - 3s \\ z = 1 - t - s \end{cases}$$

Per scrivere l'equazione cartesiana del piano imponiamo che

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 0 = 3x + 2y + 3z - 4$$

(d) Utilizzando l'equazione del fascio proprio di piani di asse r abbiamo che $\lambda(y+1) + \mu(x+z+1) = 0$ e imponendo il passaggio per il punto $(1, -2, 1)$ otteniamo $-\lambda + 3\mu = 0$. Quindi presi ad esempio $\lambda = 3$ e $\mu = 1$ otteniamo l'equazione del piano $p'' : x + 3y + z + 4 = 0$

(e) Osservando che il piano p'' contiene sia il punto $(-\frac{1}{7}, -\frac{16}{7}, 3)$ che la retta r allora un piano che individua la retta q è proprio p'' (risulta essere proprio p'' in quanto visto che le rette sono sghembe allora esiste un unico piano con le proprietà sopra elencate), per trovare l'altro piano che individua la retta q utillizziamo nuovamente il fascio proprio di piani di asse s, ossia $\lambda(y-3z+1)+\mu(x+y+1)=0$. Imponendo il passaggio per il punto $(-\frac{1}{7},-\frac{16}{7},3)$ otteniamo $-\frac{72}{7}\lambda-\frac{10}{7}\mu=0$, presi ad esempio $\lambda=-5$ e $\mu=36$ otteniamo il piano $36x+31y+15z+31=0$. Presa q come la retta data dall'intersezione del piano p'' con il piano $36x+31y+15z+31=0$ abbiamo che $q\cap t=(-\frac{1}{7},-\frac{16}{7},3)$ come richiesto. (La verifica che il punto $(-\frac{1}{7},-\frac{16}{7},3)\in t$ è stata omessa).

4. (a) Cominciamo con il verificare che F è un'applicazione lineare. Presi $\mathbf{v}=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{w}=(d,e,f)\in\mathbb{R}^3$ abbiamo che

$$F(\mathbf{v}+\mathbf{w})=F(a+d,b+e,c+f)=$$

$$(2(c+f)-(a+d),(a+d)+(b+e),(a+d)+2(b+e)+2(c+f))=$$

$$((2c-a)+(2f-d),(a+b)+(d+e),(a+2b+2c)+(d+2e+2f))=$$

$$(2c-a,a+b,a+2b+2c)+(2f-d,d+e,d+2e+2f)=F(\mathbf{v})+F(\mathbf{w})$$

Inoltre abbiamo che, preso $k\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v}=(a,b,c)$, vale

$$F(k\mathbf{v})=F(ka,kb,kc)=(2kc-ka,ka+kb,ka+2kb+2kc)=$$

$$(k(2c-a),k(a+b),k(a+2b+2c))=k(2c-a,a+b,a+2b+2c)=kF(\mathbf{v})$$

Per determinare l'immagine basta osservare che in generale $Im(F)=\langle F(e_1),F(e_2),F(e_3)\rangle$ dove con $e_i, i=1,2,3$ indichiamo i vettori di una base fissata. Nel nostro caso prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che $Im(F)=\langle(-1,1,1),(0,1,2),(2,0,2)\rangle=\langle(0,1,2),(2,0,2)\rangle$, possiamo quindi concludere che $\dim(Im(F))=2$ e che, per il teorema del rango più nullità abbiamo che $\dim(\ker(F))=1$. Per determinare il nucleo di F basta porre $F(\mathbf{v})=(0,0,0)$ e risolvere il sistema omogeneo con il metodo di Gauss-Jordan (non è l'unico modo di trovare le soluzioni), così facendo troviamo che $\ker(F)=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tali che $(a,b,c)=(t,-t,t/2)$ con $t\in\mathbb{R}\}$.

(b) Cominciamo con il verificare che F è un'applicazione lineare. Presi $\mathbf{v}=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{w}=(d,e,f)\in\mathbb{R}^3$ abbiamo che

$$F(\mathbf{v}+\mathbf{w})=F(a+d,b+e,c+f)=$$

$$(3(a+d)+(b+e)+2(c+f),-(c+f)-2(a+d)-2(b+e),(a+d)+(c+f))=$$

$$((3a+b+2c)+(3d+e+2f),(-c-2a-2b)+(-f-2d-2e),(a+c)+(d+f))=$$

$$(3a+b+2c,-c-2a-2b,a+c)+(3d+e+2f,-f-2d-2e,d+f)=F(\mathbf{v})+F(\mathbf{w})$$

Inoltre abbiamo che, preso $k\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v}=(a,b,c)$, vale

$$F(k\mathbf{v})=F(ka,kb,kc)=(3ka+kb+2kc,-kc-2ka-2kb,kc+ka)=$$

$$(k(3a+b+2c),k(-c-2a-2b),k(c+a))=kF(\mathbf{v})$$

Come nel caso precedente abbiamo che presa come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$ allora $Im(F)=\langle(3,-2,1),(1,-2,0),(2,-1,1)\rangle$, possiamo quindi concludere che $\dim(Im(F))=3$ e per il teorema di rango più nullità $\dim(\ker(F))=0$, in particolare l'applicazione F è un isomorfismo.

(c) La verifica che F è lineare si svolge analogamente ai due punti precedenti, quindi verrà tralasciata. Per determinare l'immagine procediamo come sopra e troviamo $Im(F) = \langle(1,1),(-1,1),(-1,1)\rangle = \langle(1,1),(-1,1)\rangle = \mathbb{R}^2$. Il nucleo avrà quindi dimensione 1 e per trovarlo imponiamo $F(\mathbf{v}) = (0,0)$ e otteniamo $\ker(F) = \{(0,t,t)\}$

(d) $Im(F) = \langle(1,2,0,3),(-2,1,5,-1)\rangle$, $\ker(F) = (0,0)$