Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Tutorato numero 6 (2 Aprile 2009)
Esercizi di preparazione al primo esonero

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck
http://www.mat.uniroma3.it

1. (a) Se denotiamo con A la matrice che ha per righe i vettori che generano U vediamo immediatamente che det(A)=0 e che la sottomatrice $A(124|123)$ ha rango massimo. Quindi possiamo concludere che la dimensione di U é 3 e che una sua base é <(1,0,0,1), (1,1,0,0), (0,0,1,0)>.
Per quanto riguarda W possiamo concludere senza effettuare conti che dim(W)=2 e che una sua base é <(1,1,1,1), (2,0,0,2)>, infatti sappiamo giá che due vettori sono linearmente dipendendenti se e soltanto se uno é multiplo dell'altro.
Consideriamo ora lo spazio vettoriale $U + W$; esso é generato da <(1,0,0,1), (1,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,1), (2,0,0,2)>, ma visto che <(1,0,0,1)>=<(2,0,0,2)> (sono uno multiplo dell'altro) allora possiamo dire che $U + W$=<(1,0,0,1), (1,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,1)>.
Denotando con B la matrice le cui colonne sono i vettori che generano $U+W$, vediamo che det(B)=1 e quindi possiamo concludere che la dimensione di $U + W$ é 4 e che una sua base é la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
Per determinare la dimensione di $U \cap W$ basterá utilizzare la formula di Grassman, dalla quale si ricava che dim($U \cap W$)=1. Come abbiamo giá osservato in precedenza <(1,0,0,1)>=<(2,0,0,2)> e (1,0,0,1)∈U e (2,0,0,2)∈W, quindi una base per $U \cap W$ é data proprio da (1,0,0,1).

   (b) Se denotiamo con A la matrice che ha per righe i vettori che generano U vediamo subito che det(A)=3 e quindi U ha dimensione 4 ed una sua base é la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
Per quanto riguarda W si vede subito che la sua dimensione é 2 (il secondo vettore é somma degli altri due), e che una sua possibile base é $\{(0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$.
Per quanto riguarda $U+W$ senza fare conti possiamo subito concludere che la sua dimensione é 4 e che una sua base é la base canonica di $\mathbb{R}^4$, infatti $v \in U+W \Leftrightarrow v = u+w$, con $u \in U$ e $w \in W$, ma visto che $U = \mathbb{R}^4$ scegliendo $w = 0$ si ha che $U + W = \mathbb{R}^4$.
Per determinare la dimensione di $U \cap W$ utilizziamo la formula di Grassman, cosí facendo si ottiene subito che dim($U \cap W$)=2. Per determinare una base di $U \cap W$ consideriamo il solito sistema

$$\begin{cases} 2a + b + 2c + d = 0 \\ a + 3c + d - e = 0 \\ 3a + b + c + d - e = 0 \\ a + 2b + d - f = 0 \end{cases}$$

che ha ∞^2 soluzioni del tipo $(-\frac{t}{3}, \frac{(4t-3s)}{6}, -\frac{s}{4}, s, -\frac{4t-3s}{12}, t)$. Visto che se $v \in U \cap W$ allora in particolare $v \in W$ e quindi $v = (0, e, e, 0) + (0, 0, 0, f)$; sappiamo inoltre dalla soluzione del sistema che $(e, f) = (-\frac{4t-3s}{12}, t)$. Visto che per determinare una base dobbiamo trovare due vettori linearmente indipendente della forma $v_{1,2} = (0, -\frac{4t-3s}{12}, -\frac{4t-3s}{12}, 0) + (0, 0, 0, t)$, se poniamo una volta $s = 0, t = 1$ ed una volta $s = 1, t = 0$ troviamo che $v_1 = (0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ e $v_2 = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ sono una possibile base di $U \cap W$.

2. (a) Visto che non esistono minori di ordine 2 indipendenti dal valore che assume il parametro k la strada piú breve é quella di andare a studiare i minori di ordine 3. Denotando con A la matrice le cui righe sono formate dai vettori che generano U si ha che: det(A(123|123))=$k^2(1-k)$ $\Rightarrow$ r(A(123|123)=3 se e soltanto se $k \neq 0, 1$; det(A(123|134)=k^3 $\Rightarrow$ r(A(123|134)=3 se e soltanto se $k \neq 0$; det(A(123|124)=k^3 $\Rightarrow$ r(A(123|124)=3 se e soltanto se $k \neq 0$; det(A(123|234)=0 indipendentemente dal valore di k $\Rightarrow$ r(A(123|234) $\neq 3$ sempre. Possiamo quindi concludere che il r(A)=3 (ossia la dimensione dello spazio U) $\Leftrightarrow k \neq 0$ infatti se $k = 0$ allora non esistono minori non nulli di ordine tre mentre se $k \neq 0$ allora la sottomatrice A(123|134) (non é l'unica) ha rango massimo.
Consideriamo W; come nel caso di U non esistono minori di ordine 2 il cui valore non dipende dal parametro k, quindi nuovamente studiamo i minori di ordine tre. Denotando con B la matrice le cui righe sono composte dai vettori che generano W abbiamo che: det(B(123|123))=$k(1-k^2)$, quindi r(B(123|123))=3 $\Leftrightarrow k \neq 0, 1, -1$; det($B$(123|134))=$k(k-1)$, quindi r($B$(123|134))=3 $\Leftrightarrow k \neq 0, 1$; det($B$(123|124))=$k(1-k)$, quindi r($B$(123|124))=3 $\Leftrightarrow k \neq 0, 1$; det($B$(123|234))=$-k(k-1)^2$, quindi r($B$(123|234))=3 $\Leftrightarrow k \neq 0, 1$. Possiamo quindi concludere che se $k \neq 0, 1$ allora dim(W)=3.
Cominciamo a vedere quando é che $U + W = \mathbb{R}^4$: se $k = 0$ abbiamo che $U =< (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0) >$ e che $W =< (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) >$. Si vede subito che dim($U + W$)=4 (basta mettere i vettori in colonna e calcoolare il determinante della matrice ottenuta). Inoltre visto che dim(U)=2=dim(W) per la formula di Grassman si ha che dim($U \cap W$)=0 e quindi la somma é diretta.
Se $k = 1$ abbiamo che $U =< (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) >$ e che $W =< (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1) >$. É immediato vedere che dim($U + W$)=3 e quindi $U + W \neq \mathbb{R}^4$.
Se $k \neq 0, 1$ allora dim($U + W$)=4 infatti i vettori che generano U insieme al vettore (k,k,k,k) formano una base di $\mathbb{R}^4$ (é vero perché siamo nel caso in cui $k \neq 0$). Inoltre sempre per la formula di Grassman possiamo concludere che la somma non é diretta infatti (sempre per l'ipotesi che $k \neq 0, 1$), dim(U)=3=dim(W) e quindi dim($U \cap W$)=2.

   (b) Denotando con A la matrice le cui righe sono formate dai vettori che generano U osserviamo subito che la sottomatrice A(234|123) ha rango massimo indipendeentemente dal valore che assume il parametro k, quindi l'unica verifica che dobbiamo fare é vedere per quali valori di k la matrice ha rango massimo; visto che det(A)=$-k^3$ allora possiamoconcludere che dim(U)=4 $\Leftrightarrow k \neq 0$.

Consideriamo ora lo spazio W; denotiamo con B la matrice le cui righe sono formate dai vettori che generano W, visto che r($B(12|12)$)=2 indipendentemente dal valore di k usiamo il principio dei minori orlati per determinare il rango di B cominciando ad orlare da questa sottomatrice. Esistono solo due modi di orlare la sottomatrice ossia $B(123|123)$ e $B(123|124)$; det($B(123|123)$)=$-k$ quindi r($B(123|123)$)=3 $\Leftrightarrow k \neq 0$; det($B(123|124)$)=$-k^3 + 3k - 1$ che non ha radici in $\mathbb{R}$, quindi r($B(123|124)$)=3 indipendentemente dal parametro k. Quindi dim(W)=3 sempre.
Cominciamo a vedere quando $U + W = \mathbb{R}^4$; se $k = 0$ allora $U =< (1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0) >$ e $W =< (0, 1, 0, 2), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1) >$, quindi $U + W = \mathbb{R}^4$ infatti i vettori {(0,0,1,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (1,0,0,1)} formano una base di $\mathbb{R}^4$. Per la formula di Grassman otteniamo dim($U \cap W$)=2 e quindi la somma non é diretta.
Se $k \neq 0$ allora dim($U + W$)=dim(U)=4 e quindi la somma non sará diretta (infatti $U \cap W = W$).

3. (a) Il sistema ammette un'unica soluzione (3,-1,0).
   (b) Il sistema é incompatibile.
   (c) Il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo (t,-8t-2,2t+1,13t+4).
   (d) Il sistema ammette un'unica soluzione (20,-21,23,-16).
   (e) Il sistema ammette un'unica soluzione (2,1,-1,1).

4. Nella risoluzione dei sistemi denoteremo con A la matrice dei coefficienti del sistema e con c la colonna delle soluzioni.
   (a) det(A)=$-m^2$; se $m \neq 0 \Rightarrow$ r(A)=3, allora esiste un'unica soluzione data da $(\frac{6}{m}, -2, \frac{5}{m})$; se $m = 0$ il sistema é incompatibile in quanto r(A)=1 e r($A|c$)=2.
   (b) det(A)=$-2m(m + 1)$; se $m \neq 0, -1$ allora $\exists!$ soluzione data da $(\frac{m}{m+1}, \frac{m-2}{m+1}, \frac{m}{m+1})$; se $m = 0$ allora il sistema é compatibile ed ha ∞^1 soluzioni del tipo $(0, t, 0)$; se $m = -1$ allora il sistema risulta incompatibile.
   (c) det(A)=$-2m(m-2)$; se $m \neq 0, 2$ allora $\exists!$ soluzione data da $(-\frac{m+4}{2m-4}, \frac{5m+2}{m(2m-4)}, \frac{3}{2m-4})$; se $m = 0$ il sistema risulta incompatibile; se $m = 2$ il sistema risulta incompatibile.
   (d) det(A)=6m−2); se $m \neq \frac{1}{3}$ allora $\exists!$ soluzione data da $(-\frac{m(2m-1}{3m-1}, -\frac{1}{2}, \frac{2m}{3m-1}, \frac{2m-1}{3m-1})$; se $m = \frac{1}{3}$ il sistema risulta incompatibile.

5. (a) det(A)=$2a^2 - 4$; se $a \neq \pm\sqrt{2}$ allora A é invertibile e la sua inversa é data da

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{a^2-2} & \frac{-a+1}{2a^2-4} & \frac{3a-1}{2a^2-4} \\ \frac{a}{a^2-2} & \frac{-a+2}{2a^2-4} & \frac{a-6}{2a^2-4} \end{pmatrix}$$

   Se invece $a = \pm\sqrt{2}$ r(A)=2.

(b) det(B)=$2a^2-3$; se $a \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ allora B é invertibile e la sua inversa é data da

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2-1}{2a^2-3} & \frac{a}{2a^2-3} & -\frac{a^2}{2a^2-3} \\ \frac{-a^2+2}{2a^2-3} & \frac{a}{2a^2-3} & \frac{a^2-3}{2a^2-3} \\ -\frac{a}{2a^2-3} & -\frac{3}{2a^2-3} & \frac{3a}{2a^2-3} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha che r(A)=2.

(c) det(C)=$a(a-2)(a+1)$; se $a \neq 0, 2, -1$ allora C é invertibile e la sua inversa é data da

$$\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & -\frac{1}{a^2-a-2} \\ \frac{2}{a^2-a-2} & \frac{a+2}{a^2+a} & -\frac{a}{a^2-a-2} \\ -\frac{2}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & \frac{a}{a^2-a-2} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = 0, 2, -1$ r(C)=2.

(d) det(D)=$a^3 + a^2 + a + 1 = (a+1)(a^2+1)$; se $a \neq -1$ allora D é invertibile e la sua inversa é data da

$$\begin{pmatrix} -\frac{a}{-a^2-1} & \frac{a}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a-1}{-a^2-1} & \frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} \\ \frac{1}{-a^2-1} & -\frac{a^2}{-a^3-a^2-a-1} & \frac{-a-1}{-a^2-1} & \frac{a^2+a+1}{-a^3-a^2-a-1} \\ -\frac{1}{-a^2-1} & -\frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} & \frac{-a^2+a}{-a^2-1} & -\frac{a^3}{a^3+a^2+a+1} \\ -\frac{1}{a^2+1} & \frac{1}{-a^3-a^2-a-1} & \frac{a+1}{a^2+1} & \frac{a}{-a^3-a^2-a-1} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = -1$ allora r(D)=3.