Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 – Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

TUTORATO NUMERO 5 (26 MARZO 2009)
RANGO, DETERMINANTE, MATRICI INVERSE, DISCUSSIONE DI SISTEMI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili ai seguenti indirizzi:
http://www.lifedreamers.it/liuck/
http://www.mat.uniroma3.it/

1. Denotiamo con A la matrice dei coefficienti del sistema, con c la colonna dei coefficienti e con $(A|c)$ la matrice orlata.

   (a) Visto che la prima e la terza riga della matrice A sono uguali il det (A) = 0, inoltre visto che det ($A(12|12)$) = 2 allora grazie al principio dei minori orlati possiamo concludere che r (A) = 2 (abbiamo infatti trovato un minore non nullo di ordine 2). Tuttavia r ($A|c$) = 3 infatti det ($(A|c)(123|234)$) = -4 e quindi grazie al teorema di Kronecher-Rouché-Capelli (d'ora in poi abbrevieremo con KRC) possiamo concludere che il sistema non è compatibile.

   (b) Visto che det (A) = -1 allora per KRC il sistema ammette un'unica soluzione v = (x,y,z), dove $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = 0$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = 0$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = 1$.

   (c) det (A) = $-2a+6$ allora se $a \neq 3$ il sitema ammette un'unica soluzione altrimenti visto che, se a=3, r(A) = 2 (infatti det (A$(12|13)$) = 1 indipendentemente dal valore di a) e r ($A|c$) =3 (infatti det (($A|c$) $(123|134)$) = -6) il sistema è incompatibile. La soluzione del sistema quando $a \neq 3$ è data da v = $\dfrac{(2a^2-2a, 2a^2-4a, -2a^3-2a^2-6a)}{-2a+6}$.

   (d) det (A) = a^3-2a-3 che non ha radici in $\mathbb{R}$ quindi r(A) = 3 indipendentemente dal valore di a, quindi usando Cramer troviamo che la soluzione del sistema è data da $\dfrac{(a^2+a, -2a-3, a)}{a^3-2a-3}$.

   (e) det(A) = $-4a^2+9a$ quindi se $0 \neq a \neq \frac{9}{4}$ il r (A) = 3 quindi esiste un'unica soluzione altrimenti se a = 0 oppure a = $\frac{9}{4}$ il sistema è incompatibile infatti in entrambi i casi risulta che r(A) =2 mentre r($A|c$) = 3. La soluzione del sistema quando quando il rango di A è massimo è data da $\frac{(3a^2-3a-1, -a^3+3a, -2a^2-a+9)}{-4a^2+9a}$.

(f) det (A) = a^3-a^2 quindi se $0 \neq a \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione altrimenti se a = 0 il sistema ammette ∞^2 soluzioni della forma (t,2,s) con $t,s \in \mathbb{R}$; se a = 1 invece il sistema risulta incompatibile. Nel caso in cui la soluzione è unica invece, essa è data da $\left(2, \frac{3a-2}{a-1}, \frac{-2a+1}{a-1}\right)$.

2. det(A) = 0 indipendentemente dal valore di b, inoltre det($A(13|12)$) = 1 quindi il rango di A è sempre uguale a due.Utilizzando la relazione (sempre valida!) A ${}^t(cof(A))$ = det (A) $\mathbf{1}_n$ ed il fatto che det (A) = 0 si ha che la matrice M è proprio la matrice ${}^t(cof(A))$ che in questo caso è $\begin{pmatrix} b^2 & -b & -b^2 \\ -b^2 & b & -b^2 \\ b & 1 & -b \end{pmatrix}$.

det(B) = $2b^2 - 2b$ quindi B è invertibile $\Leftrightarrow b \notin \{0,1\}$. In questo caso abbiamo che B^{-1} = $\frac{1}{b^2-b}\begin{pmatrix} 2b & -2b & 2b \\ -2 & 2b & -3b+1 \\ 0 & 0 & b^2-b \end{pmatrix}$. Se b = 0 invece abbiamo che M = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se b = 1 allora M = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

det(C) = b^2-6b-1 quindi C è invertibile $\Leftrightarrow b \notin \{3 \pm \sqrt{10}\}$, in questo caso C^{-1} = $\frac{1}{b^2-6b-1}\begin{pmatrix} b^2+2 & -b+4 & -2b-1 \\ -3 & b-6 & 1 \\ -3b & 1 & b \end{pmatrix}$.

Se $b=3+\sqrt{10}$ allora M = $\begin{pmatrix} 21+6\sqrt{10} & 1-\sqrt{10} & -7-2\sqrt{10} \\ -3 & -3+\sqrt{10} & 1 \\ -9-3\sqrt{10} & 1 & 3+\sqrt{10} \end{pmatrix}$ mentre se $b=3-\sqrt{10}$ allora M = $\begin{pmatrix} 21+6\sqrt{10} & 1+\sqrt{10} & -7+2\sqrt{10} \\ -3 & -3-\sqrt{10} & 1 \\ -9+3\sqrt{10} & 1 & 3-\sqrt{10} \end{pmatrix}$

det(D) = $-2b^2$+2b+2 quindi D è invertibile $\Leftrightarrow b \notin \{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\}$, in questo caso D^{-1} = $\frac{1}{-2b^2+2b+2}\begin{pmatrix} -b & b+1 & -b \\ -2 & 2b & -2b^2+2b \\ 2 & 2b & 2 \end{pmatrix}$.

Se $b=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$ allora M = $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}} & \frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}} & \frac{-1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}} \\ -2 & 1+\sqrt{5} & \frac{-1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{5} \\ 2 & 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$, mentre se $b=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}$ allora M = $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}} & \frac{3}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}} & \frac{-1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}} \\ -2 & 1-\sqrt{5} & \frac{-1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{5} \\ 2 & 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$.

3. Visto che A è una matrice quadrata basterà determinare i valori del parametro c affinchè $det(A)\neq 0$. Visto che det(A) = $2c^2$-3c+1 allora il rango di A è massimo quando $c\notin\{1,\frac{1}{2}\}$.

   Notiamo che det($B(12|13)$) = -1 quindi per il principio dei minori orlati abbiamo che $r(B)\geqslant 2$; per vedere se il rango di B è due o tre orliamo a partire dalla sottomatrice appena considerata; visto che det($B(123|123)$) = (c+1)(1-c) e che det($B(123|134)$) = c(2-c) allora si ha che r(B) = 3 indipendentemente dal valore che assume c infatti se c = 0,2 allora la sottomatrice $B(123|123)$ ha rango massimo mentre, se c = -1,1 allora la sottomatrice $B(123|134)$ ha rango massimo.

   Come nel caso di A basterà studiare il determinante di C; visto che det(C) = 0 indipendentemente dal valore di c possiamo concludere che $r(C)<4$.

   Visto che det($D(23|23)$) = 1 indipendentemente dal valore di c allora $r(D)\geqslant 2$; orlando troviamo che det($D(123|123)$) = c(c-1) e che det($D(234|123)$) = -c(c-1) quindi se $c\neq 0,1$ possiamo concludere che r(D) = 3 altrimenti r(D) = 2, non esisterebbero infatti minori non nulli di ordine tre.

4. (a) Falsa. Controesempio: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A+B = $\mathbf{1}_2$, r(A) = 1 = r(B) ma r(A+B) = 2.

   (b) Falsa. Controesempio: A e B come sopra, AB = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *r(AB) = 0.*

   (c) Vera. Dimostrazione: Se r(A) = n = r(B), A e B sono invertibili e quindi abbiamo $r(AB)\leqslant r(A)$ (vera sempre), e inoltre $r(A)=r(ABB^{-1})\leqslant r(AB)$, quindi $r(AB)=r(A)=n$.

   (d) Vera. Dimostrazione: Se $r(A)<n$ e $r(B)<n$, ovviamente si avrà $min(r(A),r(B))<n$, ma essendo $r(AB)\leqslant min(r(A),r(B))$ avremo che $r(AB)\leqslant min(r(A),r(B))<n$, ovvero $r(AB)<n$.

   (e) Falsa. Controesempio: A e B come nei primi due controesempi, si ha det(A) = 0 = det(B) ma det(A+B) = 1.

(f) Falsa. Controesempio: $A = \mathbf{1}_2$, $kA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; si ha $\det(A) = 1$ ma $det(kA) = 4 \neq 2\det(A)$