Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

# Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 – Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

TUTORATO NUMERO 1 (26 FEBBRAIO 2009)
SPAZI VETTORIALI, SOMME E PRODOTTI TRA MATRICI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili ai seguenti indirizzi:
*http://www.lifedreamers.it/liuck/*
*http://www.mat.uniroma3.it/*

1. Per la definizione di spazio vettoriale e per il caso di $K^n$ si può consultare il Sernesi alle pagine 17 e 18 (definizione 1.1 ed esempio 1.2.1). Una dimostrazione delle proprietà di spazio vettoriale verrà data, in un caso più generale, nell'esercizio seguente.

2. Dimostriamo che l'insieme $A$ rispetta tutte le proprietà degli spazi vettoriali. Proprietà associativa (SV1 secondo la notazione del Sernesi): $(f + g)(x) + h(x) =$ (per definizione) $= ( f (x) + g(x) ) + h(x) =$ (per la proprietà associativa della somma tra elementi del campo) $= f(x) + ( g(x) + h(x) ) =$ (per definizione) $= f(x) + (g + h)(x)$.
   Esistenza dello zero (SV2): basta prendere la funzione identicamente nulla.
   Esistenza dell'opposto (SV3): $\forall f \in A$ basta considerare la funzione $-f$.
   Proprietà commutativa (SV4): deriva direttamente dalla commutatività della somma in un campo.
   Proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori (SV5): sia $k \in K$ ed $f,g \in A$ allora si ha che $k \cdot ( ( f + g)(x) ) = k \cdot ( f(x) + g(x) ) =$ (per la proprietà distributiva del campo) $= k \cdot f(x) + k \cdot g(x) = (k \cdot f)(x) + (k \cdot g)(x)$.
   Proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari (SV6): deriva direttamente dalla proprietà distributiva del campo.
   SV7: deriva direttamente dall'associatività del prodotto nel campo.
   SV8: ovvia.
   OSS. : si noti che per $X = \{ 1,2 \dots , n \}$ lo spazio vettoriale $A$ coincide con lo spazio vettoriale $K^n$ e che per $X = \boldsymbol{N}$ si ottengono le successioni di elementi di K.

3. Le proprietà SV1, SV2, SV3 ed SV4 valgono perché $H$, essendo un campo, sarà necessariamente un gruppo abeliano rispetto all'addizione.
   Le proprietà SV5 ed SV6 derivano direttamente dalla proprietà distributiva rispetto alle operazioni definite sul campo, la SV7 dall'associatività del prodotto

sul campo e la SV8 dal fatto che l'unità moltiplicativa di $K$ è la stessa di $H$.

4. In generale vale ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$, ponendo $B = {}^tA$ si ha che ${}^t(A \cdot {}^tA) = {}^t({}^tA) \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA$ che dimostra la simmetria della matrice $A \cdot {}^tA$.
   Inoltre,poiché ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$, abbiamo che, posto $B = -{}^tA$, si ha che ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$.
   Infine notiamo che $A = \frac{1}{2} \cdot (A + {}^tA) + \frac{1}{2} \cdot (A - {}^tA)$, con $\frac{1}{2} \cdot (A + {}^tA)$ simmetrica e $\frac{1}{2} \cdot (A - {}^tA)$ antisimmetrica per quanto dimostrato in precedenza.

5. $A^2 - \mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   ${}^tA\,(2A + 3\mathbf{1}_3) = \begin{pmatrix} 29 & 0 & 11 \\ 0 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

   $({}^tA + A)^2 = \begin{pmatrix} 40 & 2 & 16 \\ 2 & 17 & 6 \\ 16 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

6. $B\,{}^tB + B - ({}^tB)^2 = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

   $2B\,(B - \mathbf{1}_2) = \begin{pmatrix} 12 & 32 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$

   $B^3 - 2B = \begin{pmatrix} 32 & 84 \\ 21 & 53 \end{pmatrix}$

7. $C^2 + (iC)^2 + i\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

   $i\,(C + \mathbf{1}_2) - ({}^tC)^2 = \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

   $i\,(C\,{}^tC) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$

8. La matrice $A \cdot B$ è una matrice 4 x 4, e non può quindi essere moltiplicata per $C$, che è una matrice 3 x 3; inoltre, la matrice ${}^tB$ è 4 x 3 e quindi non può essere moltiplicata per $A$, che è anch'essa 4 x 3. Ciò equivale a dire che la prima e la quinta operazione tra matrici non possono essere eseguite. Le altre danno

invece i seguenti risultati:

$$C\,B\,A = \begin{pmatrix} 21 & 13 & 29 \\ 2 & 1 & 0 \\ 21 & 13 & 29 \end{pmatrix}$$

$$C + (BA) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 2 & 2 & 0 \\ 18 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

$$(A + {}^tB)\,C = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$${}^tA + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$