**Università degli Studi di Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2008/2009**
**GE1 – Geometria 1, Algebra Lineare**
**Seconda prova di valutazione in itinere – 27 Maggio 2009**

**Esercizio 1.** Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2a+b+c \\ b-a \end{pmatrix}.$$

(i) Si determini una base di $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ker}(f)$.

(ii) Considerato il sottospazio vettoriale

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2t = 0 \right\}$$

di $\mathbb{R}^4$, si dimostri che $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$ e si deduca che la restrizione $g$ di $f$ a $X$ è un endomorfismo di $X$. Si stabilisca se $g$ è un automorfismo di $X$.

(iii) Si determinino autovalori e autospazi di $g$, si dica se $g$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si esibisca una base di $X$ costituita da autovettori di $g$.

**Esercizio 2.** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3, in cui sia fissato un riferimento affine. Si considerino le rette $\mathscr{R}, \mathscr{S} \subseteq \mathbb{A}$ di equazioni cartesiane

$$\mathscr{R} : \begin{cases} X - 2Y = 0 \\ X - Z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \mathscr{S} : \begin{cases} 3X - Y - 1 = 0 \\ Y - 2Z + 20 = 0 \end{cases}$$

(i) Si verifichi che le $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{S}$ sono sghembe.

(ii) Si determini un'equazione cartesiana del piano $\mathscr{P}$ contenente $\mathscr{S}$ e parallelo a $\mathscr{R}$.

(iii) Si determini un'equazione cartesiana del piano $\mathscr{P}'$ parallelo a $\mathscr{P}$ e passante per $(3, 0, 0)$.