corso GE1 - a.a. 07/08 - Appello C (27/1/09)

1) Siano: $W = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} X + 2Y - 3Z = 0 \\ 2X - Y - Z = 0 \end{cases} \right\}$,

$$U(k) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : X - kY + Z = 0 \right\}$$

Verificare che W e $U(k)$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$ per ogni valore di $k \in \mathbf{R}$. Stabilire per quali valori di k si ha $\mathbf{R}^3 = W \oplus U(k)$.

2) Determinare, al variare del parametro reale m, le soluzioni reali del seguente sistema di equazioni lineari, usando il metodo di Kronecker-Rouché-Capelli:

$$\begin{aligned} 2X + mY + mZ &= 1 \\ mX + 2Y + mZ &= 1 \\ mX + mY + 2Z &= 1 \end{aligned}$$

3) Determinare i valori del parametro reale a per cui la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2a & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per tali valori determinare gli autovalori ed una base di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori.

4) Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 in cui sia assegnato un riferimento affine. Determinare un'equazione cartesiana del piano Σ parallelo alla retta:

$$r : X - 12Y + 60 = 0, \quad 2X - 21Y - Z + 112 = 0$$

e contenente i punti $P(1, 1, -1)$ e $Q(-1, 1, -1)$.

Soluzioni

1) $k \neq 2$.

2) Per $m \neq -1, 2$ possiede l'unica soluzione

$$\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)$$

Per $m = 2$ possiede le ∞^2 soluzioni

$$\left(\frac{1}{2} - s - t, s, t\right), \qquad s, t, \in \mathbf{R}$$

Per $m = -1$ è incompatibile.

3) $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(1 - \lambda)^2$. A è diagonalizzabile se e solo se $a = 1$.

4) $3Y - Z - 4 = 0$