corso GE1 - a.a. 06/07

Prima prova di esonero (3/4/07)

1) Determinare la matrice cofattore della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

in funzione del parametro reale a. Calcolare i valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ per cui A non è invertibile e determinarne il rango in corrispondenza di tali valori.

2) Determinare le soluzioni reali del seguente sistema, utilizzando il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{llllcr} X_1 & +X_2 & & -6X_4 & = & 1 \\ X_1 & +X_2 & +X_3 & -3X_4 & = & 1 \\ 3X_1 & & +X_3 & -12X_4 & = & -3 \end{array}$$

3) Discutere il seguente sistema a coefficienti reali, in cui a è un parametro reale:

$$\begin{array}{rrrcl} X_1 & +2X_2 & -X_3 & = & 1 \\ 2X_1 & +2(a-1)X_2 & -2X_3 & = & 2 \\ -X_1 & & -(a-1)X_3 & = & 0 \end{array}$$

determinandone le soluzioni nei casi in cui è compatibile.

4) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ una base dello spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$. Siano

$$\mathbf{U} = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \rangle, \qquad \mathbf{W} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_4 \rangle$$

Dimostrare che $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$ e che la somma non è diretta. Determinare una base di $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

Soluzioni

1) Si ha $\det(A) = 2(a^2 - 1)$, che si annulla per $a = \pm 1$. Quindi A non è invertibile se e solo se $a = \pm 1$. Entrambi i valori danno luogo a matrici di rango 2, perché hanno le prime due righe uguali se $a = 1$ e opposte se $a = -1$, mentre la terza riga non è proporzionale alle prime due.

2) Il sistema possiede le ∞^1 soluzioni:

$$(5t - 1, 2 + t, -3t, t), \qquad t \in \mathbf{R}$$

3) questo esercizio era già stato assegnato come n. 2 del tutorato del 01/03/2007, e la soluzione è stata pubblicata sulla pag. web.

4) $\dim(\mathbf{U}) = 2$ perché i suoi due generatori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ non sono proporzionali. Invece $\dim(\mathbf{W}) = 3$ perché i primi due generatori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ non sono proporzionali, e il terzo $\mathbf{w}_3$ non è loro combinazione lineare perché in esso $\mathbf{e}_4$ ha coefficiente $3 \neq 0$ mentre il coefficiente di $\mathbf{e}_4$ nei primi due vettori è nullo.

Per vedere che $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$ si osservi che:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_2,\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{w}_1,\ 2\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,\ 3\mathbf{e}_4 = \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_1$$

Per la formula di Grassmann, $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 1$ e quindi la somma non è diretta. Si ha:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$$

e quindi $\{\mathbf{e}_3\}$ è una base di $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.