Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

Tutorato 3
12 ottobre 2011

1. Verificare che $\sin(z) = -i\sinh(iz)$ e che $\tanh(z) = -i\tan(iz)$.

2. Calcolare i logaritmi di e, i, $-i$, $-1-i$, $3-2i$.

3. Calcolare:

   a) i^i
   b) $i^{\frac{1}{i}}$
   c) 1^i
   d) $(-1)^{\sqrt{2}}$
   e) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$

4. Determinare tutti i numeri complessi z tali che i^z è sempre reale.

5. Determinare gli zeri delle seguenti funzioni e i loro rispettivi ordini:

   a) $z^2(z-1)$
   b) $z(z-1)\sin(\pi z)$
   c) $\cos(z)$
   d) $\tan(z)$
   e) $e^z - 1$

6. Trovare due funzioni $f \neq g$, analitiche su un aperto Ω, tali che $f = g$ in un aperto $U \subset \Omega$.

7. Sia f una funzione analitica su tutto $\mathbb{C}$. Dimostrare che l'insieme dei suoi zeri è al più numerabile.

8. Sia f una funzione analitica in U tale che, in ogni espansione $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-w)^n$, almeno uno dei c_n è 0. Dimostrare che f è un polinomio.

9. Sia Ω un aperto connesso, $a \in \Omega$; ricordiamo che $H(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni analitiche in Ω. Verificare che l'applicazione naturale $i_a : H(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}[[X]]$ che associa ad ogni funzione la sua serie formale in a è un omomorfismo iniettivo di anelli. Dedurne che $H(\Omega)$ è un dominio d'integrità.

10. Spiegare perché e^{e^z} non è definita come serie formale, ma $e^{(e^z-1)}$ lo è.

11. Dimostrare che se f è una serie formale tale che $f' = f$ allora $f = ce^z$ per un $c \in \mathbb{C}$.

12. Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Dimostrare che:

    a) $\dfrac{f(z)}{1-z} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) z^n$
    b) $zf'(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n z^n$