Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

Tutorato 6
16 novembre 2011

1. Sia f una funzione intera tale che $|f(z)| < A|z|^n$ per un $n \in \mathbb{N}$, un $A > 0$ e per $|z|$ sufficientemente grande. Dimostrare che f è un polinomio.

   Soluzione. I polinomi di grado n sono tutte e sole le funzioni olomorfe la cui $(n+1)$-esima derivata si annulla identicamente (come si può vedere, ad esempio, intregrando $n+1$ volte la funzione 0). L'idea è di modificare la dimostrazione del teorema di Liouville:

$$|f^{(n+1)}(z)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z|}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}}\mathrm{d}\zeta\right| \leq \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{n+2}}|\mathrm{d}\zeta|$$

   dove $|\mathrm{d}\zeta| = |z'(t)|\mathrm{d}t$ quando si passa alla parametrizzazione. Ora $|\zeta-z|^{n+2} = R^{n+2}$, mentre $|z| = |z-\zeta+\zeta| \leq |z-\zeta| + |\zeta| = R + |\zeta| \leq 2R$ per R abbastanza grande. Inserendo tutto

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z|=R}\frac{(2R)^n}{R^{n+2}}|d\zeta| = \frac{n!}{2\pi i}\frac{2^n}{R^2}\oint_{|\zeta-z|=R}|d\zeta|$$

   L'ultimo integrale non è altro che la lunghezza della curva d'integrazione, ovvero $2\pi R$; quindi

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi i}\frac{2^n}{R^2}2\pi R = \frac{c}{R}$$

   dove c è una costante che non dipende né da R né da z. Mandando R a infinito si ottiene $|f^{(n+1)}(z)| \leq 0$, ovvero $f^{(n+1)} = 0$, da cui la tesi.

2. Calcolare i seguenti integrali:
   a) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z-2}\mathrm{d}z$
   b) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-2)^3}\mathrm{d}z$
   c) $\displaystyle\int_{|z|=5}\frac{\sin(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}z$
   d) $\displaystyle\int_{|z-1|=4}\frac{e^{3z}}{z-\pi i}\mathrm{d}z$
   e) $\displaystyle\int_{|z-2|+|z+2|=6}\frac{e^{3z}}{z-\pi i}\mathrm{d}z$

f) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^3}\mathrm{d}z$

g) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\mathrm{d}z$, dove C è il rettangolo di vertici $\pm 2 \pm i$

Soluzione. Tutti gli esercizi si risolvono con l'applicazione della formula di Cauchy; I indica l'integrale in questione.

a) 0 (la funzione è olomorfa in $B_1(0)$, la singolarità è in 2)

b) $\displaystyle I = \left.\frac{(e^z)''}{2}\right|_2 = \frac{e^2}{2}$

c) $I = 2\pi i \sin(3(-\frac{\pi}{2})) = 2\pi i$

d) $|1-\pi i|^2 = 1+\pi^2 < 16 = 4^2$, quindi $I = 2\pi i e^{3\pi i}$

e) $|2-\pi i| + |-2-\pi i| = 2|2-\pi i| = 2\sqrt{4+\pi^2} > 2\sqrt{4+9} = \sqrt{52} > 6$ e quindi l'integrale è 0.

f) $\displaystyle I = 2\pi i \left|\frac{(e^{iz})''}{2}\right|_0 = -\pi i$

g) $\displaystyle I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \cos(\pi z)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(\cos(\pi) - \cos(pi)) = 0$

3. Dimostrare che, se $t > 0$, allora $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \sin t$.

   Soluzione.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{(z+i)(z-i)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} e^{zt}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\mathrm{d}z \tag{1}$$

   Spezzando l'integrale ed applicando la formula di Cauchy si ottiene $I = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \sin(t)$.

4. Sia f analitica all'interno di una curva chiusa semplice C che contiene il punto a. Dimostrare che $\displaystyle(f(a))^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(f(z))^n}{z-a}\mathrm{d}z$

   Soluzione. Basta applicare la formula di Cauchy alla funzione $g(z) = (f(z))^n$.

5. Verificare che $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = 0$. Si può concludere da questo che $\displaystyle\frac{1}{z^2+1}$ è la derivata di una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$?

   Soluzione. $\displaystyle\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}$ e quindi

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\mathrm{d}z = 2i\pi - 2i\pi = 0$$

dal teorema di Cauchy. Per applicare il teorema di Morera dovremmo avere che l'integrale è 0 lungo ogni curva chiusa in $\{|z| \leq 2\}$. Ma se γ è la circonferenza di centro i e raggio 1, l'integrale è $2i\pi$, e $\dfrac{1}{z^2+1}$ non può essere la derivata di una funzione olomorfa in questa regione, e neppure in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6. a) Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con un numero finito di poli. Dimostrare che f è il quoziente di due funzioni intere. Quale problema sorge nel caso di un numero infinito di poli?

   b) Esibire una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con un numero infinito di poli.

   Soluzione. Siano $z_1, \dots, z_n$ i poli di f (ognuno ripetuto k volte, dove k è l'ordine del polo). Allora $g(z) := (z-z_1) \cdots - (z-z_n) f(z)$ è una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, mentre nei z_i non ha più poli (in quanto sono "compensati" dai $z - z_i$). Dunque è intera, e $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_1)\cdots-(z-z_n)}$.

   Nel caso di un numero infinito di poli, il prodotto $\prod_i (z - z_i)$ potrebbe non convergere, e quindi $g(z)$ potrebbe non essere definita.

   Una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con infiniti poli è, ad esempio, $\frac{1}{\sin(z)}$.

7. Determinare e classificare le singolarità delle seguenti funzioni:

   a) $\dfrac{1}{(2\sin z - 1)^2}$

   b) $\dfrac{z}{e^{1/z} - 1}$

   c) $\cos(z^2 + z^{-2})$

   d) $\dfrac{z}{e^z - 1}$

   Soluzione.

   a) La funzione ha poli di ordine 2 dove $\sin z = \frac{1}{2}$; separando parte reale e parte immaginaria, si ottengono i punti

      i. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

      ii. $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

      iii. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\eta$ dove η è l'unico numero reale tale che $e^\eta + e^{-\eta} = 1$.

   b) La funzione ha poli di ordine 1 dove $e^{1/z} - 1 = 0$, ovvero per $z = \frac{1}{2\pi k i}$, $k \in \mathbb{Z}$; 0, al contrario, *non è una singolarità*, in quanto la funzione non è olomorfa in nessun intorno bucato $B_r(0) = \setminus\{0\}$ (i poli si accumulano su 0).

   c) L'unica singolarità è in 0; considerando le due successioni $z_k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi k}}$ e $w_k = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}}$ si ottengono i due limiti 1 e 0, e dunque la singolarità è essenziale.

   d) In 0, la funzione ha limite $1 \neq 0$; quindi la singolarità è eliminabile. Negli altri punti in cui $e^z = 1$ (ovvero $2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$) la funzione ha un polo di ordine 1.

8. Sia f una funzione intera. Definiamo la *singolarità di f all'infinito* come la singolarità di $g(z) = f(1/z)$ in $z = 0$.

a) Dimostrare che se f ha una singolarità rimovibile all'infinito allora è costante.

b) Verificare che se f è un polinomio di ordine n allora f ha all'infinito un polo di ordine n.

c) Dimostrare che se f ha un polo di ordine n all'infinito allora è un polinomio di ordine n.

Soluzione. Se f ha una singolarità rimovibile all'infinito, $\lim_{z\to 0} g(z)$ esiste finito, ovvero $\lim_{z\to\infty} f(z)$ è finito. Ma allora $g(z)$ è limitata su $\mathbb{C}$, e dunque è costante per il teorema di Liouville.

Se $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, allora $g(1/z) = a_0 + a_1 \dfrac{1}{z} + \cdots + a_n \dfrac{1}{z^n}$ ha un polo di ordine n in 0.

Avere un polo di ordine n in 0 è equivalente a dire (per una funzione h) che esistono due costanti c_1 e c_2 tali che $\frac{c_1}{|z|^n} < |h(z)| < \frac{c_2}{|z|^n}$ per i z di modulo abbastanza piccolo; applicando questo a g e usando la sua definizione si ha $\frac{c_1}{|z|^n} < |f\left(\frac{1}{z}\right)| < \frac{c_2}{|z|^n}$ per tutti i z abbastanza piccoli, ovvero $c_1|z|^n < |f(z)| < c_2|z|^n$ per tutti i z di modulo abbastanza grande; questo, per l'esercizio 1, implica che f è un polinomio di ordine n.

9. Espandere in serie di Laurent in un intorno di 0 e descrivere la singolarità della funzione:

a) $\dfrac{1-\cos(z)}{z}$ b) $\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$ c) $z^{-1}\cosh(z^{-1})$

Soluzione.

a) $z = 0$ è una singolarità eliminabile: infatti scriviamo la funzione come

$$\frac{1-\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \cdots = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+2)!} \tag{2}$$

b) $z = 0$ è un polo di ordine 3: la funzione viene scritta come

$$\frac{e^{z^2}}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{4!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3}\sum_{k\geq 0}\frac{z^{2k}}{k!} = \sum_{k\geq 0}\frac{z^{2k-3}}{k!} \tag{3}$$

c) $z = 0$ è una singolarità essenziale. Dato che $\cosh(z^{-1}) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{z^{2k}(2k!)}$ allora

$$z^{-1}\cosh(z^{-1}) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{z^{2k+1}(2k!)} \tag{4}$$

10. Trovare le serie di Laurent di:

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ attorno a 0, 1 e 2

b) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ attorno a 0

Soluzione. L'obiettivo è sfruttare estensivamente le proprietà della serie geometrica.

a) Riscriviamo la funzione come $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z}$

i. Caso $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{-1}{-z+1} + \frac{2}{2-z} = \frac{-1}{-z+1} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{k\geq 0} z^k + \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{2^k} = \sum_{k\geq 0} z^k \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \tag{5}$$

ii. Caso $1 < |z| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{k<0} z^k + \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{2^k} \tag{6}$$

iii. Caso $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - \frac{2}{z(1-\frac{2}{z})} = \sum_{k<0} z^k - \sum_{k<0} \frac{z^k}{2^k} = \sum_{k<0} z^k \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \tag{7}$$

iv. Caso $|z-1| > 1$: poniamo $z - 1 = t$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{1-t} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t(1-\frac{1}{t})} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t}\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \cdots\right) =$$

$$-\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t^3} - \cdots = -\frac{1}{t} - 2\sum_{k<-1} t^k = -\frac{1}{z-1} \sum_{k<-1} (z-1)^k \tag{8}$$

v. Caso $0 < |z-2| < 1$: poniamo $z - 2 = t$

$$f(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{2}{t} = -\frac{2}{t} + \sum_{k\geq 0} (-1)^k t^k = -\frac{2}{z-2} + \sum_{k\geq 0} (-1)^k (z-2)^k \tag{9}$$

b)

$$f(z) = -\frac{1}{2z} + \frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{4(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2z} - \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{2^{k+2}} \tag{10}$$

nel caso in cui $0 < |z| < 2$.

Se invece $|z| > 2$ allora

$$f(z) = -\frac{1}{2z} + \frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{2z} + \frac{1}{2z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \cdots = \sum_{k\geq 0} \frac{2^k}{z^{k+2}} = \sum_{k<0} \frac{z^{k-1}}{2^{k+1}}. \tag{11}$$