Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2011/20112
AC310
Prima prova di valutazione in itinere – 2 Novembre 2011

Esercizio 1 (5 punti). Descrivere l'insieme $S = \{z \in \mathbb{C} : \cos z \in \mathbb{R}\}$. La funzione $\cos z$ è limitata? (motivare la risposta).

Esercizio 2 (5 punti). Determinare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n\geq 0} \cos in \cdot z^n$.

Esercizio 3 (7 punti). Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra, nella forma svolta a lezione.

Esercizio 4 (5 punti). Calcolare:

$$\int_C z \,\mathrm{Im}(z^2) dz$$

dove $C : |\mathrm{Im}(z)| \leq 1, \quad \mathrm{Re}(z) = 1$, orientata nel verso di $\mathrm{Im}(z)$ crescente.

Esercizio 5 (5 punti). Si consideri l'aperto

$$U = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 4\}$$

e la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$ su U. Si dia una stima superiore per $|f(z)|$ al variare di $z \in U$ (fare attenzione alla scelta appropriata tra $<$ e $\leq$).

Esercizio 6 (5 punti). Dopo aver dato la definizione di z^w per $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, dimostrare che se $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora z^q possiede un numero finito di determinazioni.

Soluzioni

Esercizio 1 S è l'unione dell'asse reale e delle rette

$$\{k\pi + iy : y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Si ha, per $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

e quindi $\lim_{y\to\infty} \cos iy = \lim_{y\to-\infty} \cos iy = \infty$. Pertanto $\cos z$ non è limitata.

Esercizio 2 $R = e^{-1}$.

Esercizio 4 $-\frac{4}{3}$

Esercizio 5 Per il principio del massimo modulo la funzione continua $|f(z)|$ assume il suo massimo sulla frontiera di U. Per elementari motivi geometrici tale massimo viene assunto nel punto $3i$ e vale $\frac{1}{4}$. Pertanto $|f(z)| < \frac{1}{4}$ per ogni $z \in U$.

Esercizio 6 Tutte le determinazioni di $z^{\frac{m}{n}}$ sono della forma

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log(z)} = e^{\frac{m}{n}(\log|z|+i(\mathrm{Arg}(z)+2k\pi)} = e^{\frac{m}{n}(\log|z|+i(\mathrm{Arg}(z))}e^{i\frac{m}{n}2k\pi}$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Ma $e^{i\frac{m}{n}2k\pi}$ possiede al più n determinazioni distinte.