Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2011/2012
AC310
Appello A – 23 Gennaio 2012

Esercizio 1 (7 punti). Determinare la corona circolare di convergenza della serie di Laurent

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$$

Esercizio 2 (8 punti). Sviluppare in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$$

nella corona $1 < |z| < 2$ e nel disco $|z| < 1$. Calcolare

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\frac{9}{4}}(0)} \frac{(2z+3)\cos(\pi z}{)} z^2+3z+2dz$$

Esercizio 3 (7 punti). Utilizzando il teorema di Rouché dare informazioni sulla posizione delle radici del polinomio $g(z) = z^4 - z^2 - 7z - 1$

Esercizio 4 (10 punti). Enunciare la formula integrale di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa e le conseguenti stime sui coefficienti dello sviluppo in serie della funzione. Utilizzando tali stime si dimostri il teorema di Liouville.

Determinare semirette A e B con l'origine in 0 e tali che la funzione $f(z) = -\frac{z}{e^z}$ sia limitata su A e non sia limitata su B, motivando la risposta.

Soluzioni

Esercizio 1. $5 < |z + 2i| < 6$

Esercizio 2. Sviluppo in $1 < |z| < 2$: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$.
Sviluppo in $|z| < 1$: $\sum_{n \geq 0} \left[(-1)^n + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] z^n$
$\mathbf{I} = 0$

Esercizio 3. Si trovano tutte nel disco $|z| < 3$ ed una di esse nel disco $|z| < 1$.