Analisi complessa

EDOARDO SERNESI

Indice

Capitolo 1

Funzioni analitiche

1.1 Funzioni olomorfe

Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto del piano complesso, ed $f : U \to \mathbf{C}$ è una funzione, scriveremo $f(z)$, oppure $f(x+iy)$, per denotarne il valore in un punto $z = x+iy \in U$. Scriveremo anche

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

dove u e v sono funzioni di due variabili reali a valori reali, chiamate rispettivamente la *parte reale* e la *parte immaginaria* di f.

Definizione 1.1.1 *Sia $V \subset \mathbf{C}$ un aperto, $\varphi : V \longrightarrow \mathbf{C}$ una funzione, e $a \in \overline{V}$. Un numero complesso c si dice* limite di φ al tendere di $z \in V$ ad a, *e si scrive:*

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) = c$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che $|\varphi(z) - c| < \epsilon$ per ogni $z \in V$ tale che $|z-a| < \delta_\epsilon$.

È facile verificare che questa nozione di limite gode di proprietà simili a quelle possedute dalla analoga nozione di limite di una funzione di variabile reale. In particolare, il limite di un prodotto o di una somma di funzioni è il prodotto, risp. la somma, dei limiti delle funzioni.

Definizione 1.1.2 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto del piano complesso. Una funzione $f : U \to \mathbf{C}$ si dice* derivabile in senso complesso, *o* olomorfa, in un punto *$a \in U$ se è continua in a ed esiste il*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

che si denota $f'(a)$ e si chiama derivata di f in a. *f si dice* derivabile in senso complesso *o* olomorfa in U *se lo è in ogni punto di U. In tal caso la funzione*

$$f' : U \longrightarrow \mathbf{C}$$

$$z \longmapsto f'(z)$$

è detta derivata di $f(z)$.

L'insieme delle funzioni olomorfe in un aperto U si denota $H(U)$. Una funzione olomorfa in tutto il piano si dice *intera*.

Proposizione 1.1.3 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Se $f : U \to \mathbf{C}$ è olomorfa in $a \in U$ allora f è continua in a.*

Dim. Si ha:

$$\lim_{h \to 0}[f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h = f'(a)0 = 0$$

perché il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti. $\diamond$

Le due proposizioni che seguono si dimostrano in modo del tutto simile agli analoghi risultati validi per funzioni di variabile reale, e quindi ne omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 1.1.4 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto e siano $f, g : U \to \mathbf{C}$ funzioni olomorfe in un punto $a \in U$. Allora*

(i) $f + g$ è olomorfa in a e

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

(ii) fg *è olomorfa in* a *e*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(iii) Se $g(a) \neq 0$ *allora* f/g *è olomorfa in* a *e*

$$(f/g)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Proposizione 1.1.5 *Siano* $U, V \subset \mathbf{C}$ *aperti,* $f : U \to V$*,* $g : V \to \mathbf{C}$ *funzioni. Se* f *è olomorfa in* $z \in U$ *e* g *è olomorfa in* $w = f(z)$*, allora* $g \circ f$ *è olomorfa in* z *e:*

$$(g \circ f)'(z) = g'(w)f'(z)$$

Esempio 1.1.6 Le funzioni costanti sono olomorfe e hanno derivata nulla in ogni punto. Inoltre:

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

se $n > 0$ e $z \in \mathbf{C}$, oppure $n < 0$ e $z \neq 0$ (la dimostrazione si dà come nel caso di funzioni di variabile reale). Quindi, per la Proposizione 1.1.4, i polinomi sono funzioni intere; similmente le funzioni razionali, cioè le funzioni definite dal quoziente di due polinomi, sono olomorfe in tutti i punti in cui non si annulla il denominatore.

Esempio 1.1.7 La funzione $f(z) = \bar{z}$ non è olomorfa in alcun punto di $\mathbf{C}$. Verifichiamolo in 0. Scrivendo $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ il rapporto incrementale è:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x^2 - y^2 - 2\mathrm{i}xy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 1 & \text{se } y = 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e quindi non possiede limite per $z \to 0$. In modo simile si verifica che $\bar{z}$ non è derivabile in alcun altro punto di $\mathbf{C}$.

Teorema 1.1.8 *Sia* $U \subset \mathbf{C}$ *un aperto. Se una funzione* $f : U \to \mathbf{C}$ *è olomorfa in un punto* $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ *allora la sua parte reale* u *e la sua parte immaginaria* v *sono derivabili parzialmente nel punto* (x_0, y_0) *e sussistono le seguenti identità nel punto* (x_0, y_0)*:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.1}$$

Le (1.1) si dicono equazioni di Cauchy-Riemann*.*

Dim. Facendo tendere $z \to z_0$ mantenendo la parte immaginaria costante si ottiene l'identità:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + \mathrm{i}(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Facendo invece tendere $z \to z_0$ mantenendo la parte reale costante si ottiene:

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + \mathrm{i}(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{\mathrm{i}(y - y_0)} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{i}\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Quindi u e v possiedono derivate parziali in (x_0, y_0) e sussistono le (1.1). $\diamond$

Esempio 1.1.9 La funzione $f(z) = \bar{z} = x - \mathrm{i}y$ ha parte reale $u = x$ e parte immaginaria $v = -y$, che sono derivabili parzialmente in ogni punto. Però si ha identicamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

e quindi le (1.1) non sono verificate. Quindi, come già verificato direttamente nell'esempio 1.1.7, la funzione $\bar{z}$ non è olomorfa in alcun punto di $\mathbf{C}$.

In questo capitolo studieremo una classe di funzioni olomorfe, le funzioni analitiche. Nel successivo capitolo dimostreremo, tra l'altro, che tutte le funzioni olomorfe sono analitiche, cioè che queste due classi di funzioni coincidono.

1.2 Serie formali

Sia T una indeterminata. Una *serie formale di potenze* (o semplicemente una *serie formale*) nella T a coefficienti complessi è un'espressione

$$f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots$$

in cui $a_k \in \mathbf{C}$ per ogni k. Una serie formale può anche identificarsi con la successione dei suoi coefficienti

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$$

a_0 si dice il *termine costante* della serie $f(T)$ e si denota anche con $f(0)$. Se

$$f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k, \quad g(T) = \sum_{k \geq 0} b_k T^k$$

sono due serie formali, definiamo la loro *somma* $f + g$ come

$$(f+g)(T) = \sum_{k \geq 0} c_k T^k$$

dove

$$c_k = a_k + b_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Definiamo il *prodotto* fg come:

$$(fg)(T) = \sum_{k \geq 0} d_k T^k$$

dove

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Se $\alpha \in \mathbf{C}$ definiamo αf come

$$(\alpha f)(T) = \sum_{k \geq 0} (\alpha a_k) T^k$$

La *serie nulla* è la serie $0(T)$ i cui coefficienti sono tutti uguali a zero.

L'insieme delle serie formali nella T a coefficienti complessi si denota con il simbolo $\mathbf{C}[[T]]$. Con le operazioni di somma e di prodotto che abbiamo introdotto $\mathbf{C}[[T]]$ è un anello contenente come sottoanello l'anello dei polinomi $\mathbf{C}[T]$. Segue immediatamente dalla definizione che il prodotto di due serie di potenze è uguale a zero se e solo se uno almeno dei fattori è nullo; pertanto $\mathbf{C}[[T]]$ è un dominio di integrità.

Lemma 1.2.1 *Una serie formale $a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots$ è invertibile in $\mathbf{C}[[T]]$ se e solo se $a_0 \neq 0$.*

Dim. Se infatti esiste $b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots \in \mathbf{C}[[T]]$ tale che

$$(a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots)(b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots) = 1$$

allora $a_0b_0 = 1$ e quindi $a_0 \neq 0$. Viceversa, se $a_0 \neq 0$ l'inversa $b_0+b_1T+b_2T^2+\cdots$ di $a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots$ è univocamente individuata dalle condizioni:
$a_0b_0 = 1$
$a_1b_0 + a_0b_1 = 0$
$a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0$
$\cdots\cdots$
che permettono di calcolare induttivamente i coefficienti $b_0, b_1, b_2, \ldots$. ◇

Una serie formale $\sum_{k\geq 0} a_kT^k$ può essere *derivata termine a termine* ponendo

$$(\sum_{k\geq 0} a_kT^k)' := \sum_{k\geq 1} ka_kT^{k-1}$$

La serie ottenuta iterando la derivata k volte si denota con $f^{(k)}(T)$ e fornisce l'identità

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \tag{1.2}$$

Esempio 1.2.1 In $\mathbf{C}[[T]]$ si ha

$$(1-T)^{-1} = 1 + T + T^2 + \cdots = \sum_{k\geq 0} T^k$$

Per induzione su n si dimostra facilmente che, più in generale, si ha:

$$(1-T)^{-n-1} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n}{n} T^k \tag{1.3}$$

per ogni $n \geq 0$. (Suggerimento: utilizzare l'identità

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{j=0}^{k} \binom{j+n-1}{n-1}$$

che si deduce per induzione dalla:

$$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k-1}{n} + \binom{n+k-1}{n-1}$$

(cfr. [1], p. 54).) La (1.3) può anche scriversi nella forma equivalente seguente:

$$(1-T)^{-n-1} = \sum_{k\geq n} \binom{k}{n} T^{k-n} \tag{1.4}$$

Esercizio. Sia $f(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$ una serie formale. Dimostrare che si ha:

$$\frac{f(T)}{1-T} = \sum_{n\geq 0} s_n T^n$$

dove $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Il campo dei quozienti di $\mathbf{C}[[T]]$ si denota $\mathbf{C}((T))$. I suoi elementi si dicono *serie di Laurent meromorfe formali* nella indeterminata T.

Lemma 1.2.2 *Ogni elemento non nullo $X \in \mathbf{C}((T))$ può essere scritto in modo unico nella forma*

$$X = T^{\nu}(a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots) \qquad \nu \in \mathbf{Z},\ a_0 \neq 0$$

Dim. Sia:

$$X = \frac{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots}{c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \cdots}$$

e sia $h \geq 0$ il più piccolo intero tale che $c_h \neq 0$. La serie di potenze

$$c_h + c_{h+1} T + c_{h+2} T^2 + \cdots$$

è invertibile in $\mathbf{C}[[T]]$: sia

$$d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + \cdots = (c_h + c_{h+1} T + c_{h+2} T^2 + \cdots)^{-1}$$

Allora:

$$X = T^{-h}(b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots)(d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + \cdots)$$

e poiché $(b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots)(d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + \cdots) \in \mathbf{C}[[T]]$ si ha

$$(b_0+b_1T+b_2T^2+\cdots)(d_0+d_1T+d_2T^2+\cdots) = T^k(a_0+a_1T+a_2T^2+\cdots) \qquad a_0 \neq 0$$

per qualche $k \geq 0$, la conclusione segue con $\nu = k - h$. $\diamond$

L'intero ν si chiama *ordine* della serie di Laurent X, e si denota $o(X)$. Porremo $o(0) = \infty$. Otteniamo in questo modo un'applicazione:

$$o : \mathbf{C}((T)) \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$$

che possiede le seguenti proprietà, di immediata verifica. Per ogni $X, Y \in \mathbf{C}((T))$ si ha:

- $o(XY) = o(X) + o(Y)$
- $o(X \pm Y) \geq \min(o(X), o(Y))$ e vale l'uguaglianza se $o(X) \neq o(Y)$.
- $X \in \mathbf{C}[[T]]$ se e solo se $o(X) \geq 0$.

In particolare, per ogni $X \neq 0$ si ha $o(X^{-1}) = -o(X)$. Dal lemma segue che ogni elemento $X \in \mathbf{C}((T))$ si può scrivere in modo unico come una serie di potenze in T a esponenti in $\mathbf{Z}$ avente solo un numero finito di termini con esponente negativo, cioè nella forma:

$$X = a_{-m}T^{-m} + \cdots + a_{-1}T^{-1} + P \qquad a_{-m} \neq 0$$

dove

$$P = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \in \mathbf{C}[[T]]$$

L'espressione $a_{-m}T^{-m} + \cdots + a_{-1}T^{-1}$ si chiama *parte principale* di X.

Siano $f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$, $h(T) = \sum_{j \geq 1} b_j T^j$ due serie formali, con $o(h) \geq 1$. Allora è ben definita la serie formale $f(h(T))$, che si dice *composizione di f ed h*, ottenuta per sostituzione di h in f, cioè ponendo:

$$f(h(T)) = \sum_{k \geq 0} a_k h(T)^k = \sum_{k \geq 0} a_k (\sum_{j \geq 1} b_j T^j)^k$$

Infatti per ogni $k \geq 0$ si ha $o(h(T)^k) \geq k$, e quindi il coefficiente di T^k in $f(h(T))$ è ben definito come somma di un numero finito di termini, per ogni $k \geq 0$. La serie $f(h(T))$ si denota anche $(f \circ h)(T)$. È immediato che il suo ordine è

$$o(f \circ h) = o(f)\ o(h)$$

Si ha anche l'identità:

$$f(h(T))' = f'(h(T))h'(T) \tag{1.5}$$

la cui verifica è lasciata come esercizio.

1.3 Serie convergenti

Convergenza di serie di numeri complessi. Sia $\{\alpha_k\}$ una successione di numeri complessi, e consideriamo la serie

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k$$

Definiamo la somma parziale

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$$

Diremo che la serie *converge* se esiste $w \in \mathbf{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = w$$

In tal caso diremo che w è la *somma della serie* e scriveremo:

$$w = \sum_{k\geq 0} \alpha_k$$

Se $A = \sum_{k\geq 0} \alpha_k$ e $B = \sum_{k\geq 0} \beta_k$ sono due serie convergenti allora la loro somma ed il loro prodotto sono serie convergenti. Precisamente, detta

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k$$

la somma parziale della serie B, $A \pm B$ ha per somma il $\lim_{n\to\infty} s_n \pm t_n$, mentre $AB = \left(\sum_{k\geq 0} \alpha_k\right)\left(\sum_{k\geq 0} \beta_k\right)$ ha per somma il $\lim_{n\to\infty} s_n t_n$ ([1], p. 63-64).

Sia $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ una serie di numeri complessi. Diremo che la serie *converge assolutamente* se la serie a termini reali nonnegativi $\sum_{k\geq 0} |\alpha_k|$ converge.

Lemma 1.3.1 *Se una serie converge assolutamente allora converge.*

Dim. Per ogni $m \leq n$ si ha:

$$s_n - s_m = \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n$$

e quindi:

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|$$

Dall'assoluta convergenza segue che dato $\epsilon > 0$ esiste N tale che $\sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k| < \epsilon$ se $m, n \geq N$: ciò dimostra che la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali è di Cauchy nello spazio metrico $\mathbf{C}$, e quindi converge ([1], p.112). $\diamond$

Si noti che se $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ converge allora $\lim \alpha_k = 0$: infatti $\alpha_k = s_k - s_{k-1}$ e $\{s_k\}$ è una successione di Cauchy.

Nel seguito utilizzeremo liberamente i seguenti fatti elementari riguardanti l'assoluta convergenza, per la cui dimostrazione si rinvia a [1]:

(i) (Criterio del confronto) Sia $\sum_{k\geq 0} r_k$ una serie convergente di numeri reali nonnegativi. Se $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ è una serie di numeri complessi tale che $|\alpha_k| \leq r_k$ per ogni k allora la serie $\sum \alpha_k$ converge assolutamente ([1], p.71).

(ii) Se una serie di numeri complessi $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ è assolutamente convergente, allora ogni serie ottenuta riordinando i suoi termini converge assolutamente allo stesso limite ([1], p.107).

(iii) Se una serie doppia

$$\sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{h\geq 0} \alpha_{hk} \Big)$$

converge assolutamente, allora la serie ottenuta scambiando l'ordine di sommazione converge assolutamente allo stesso limite.

Definizione 1.3.1 *Una serie della forma* $\sum_{k\geq 0} ar^k$*,* $a, r \in \mathbf{R}$*,* $a \neq 0$*, è detta una* serie geometrica.

Proposizione 1.3.2 *Una serie geometrica converge se e solo se* $|r| < 1$*. Nel caso convergente si ha:*

$$\sum_{k\geq 0} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Dim. (si veda anche [1], p.113) Se $|r| = 1$ la serie evidentemente non converge. Supponiamo quindi $|r| \neq 1$. Si ha

$$s_{n-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Se $|r| < 1$ allora $\lim r^n = 0$ e quindi $\lim s_{n-1} = \frac{a}{1-r}$ e la serie converge. D'altra parte se $|r| > 1$ allora ar^n non tende a 0 e quindi la serie non converge. $\diamond$

I seguenti criteri di convergenza sono utilizzati frequentemente.

Teorema 1.3.3 (Criterio della radice) *Sia* $\{a_k\}$ *una successione di numeri reali non negativi. Se esistono un numero* c, *con* $0 < c < 1$, *e un intero* k_0 *tali che*

$$(a_k)^{\frac{1}{k}} \leq c$$

per ogni $k \geq k_0$, *allora la serie* $\sum a_k$ *è convergente.*

Dim. [1], p. 97. $\diamond$

Teorema 1.3.4 (Criterio del rapporto) *Sia* $\{a_k\}$ *una successione di numeri reali positivi. Se esistono un numero* c, *con* $0 < c < 1$ *e un intero* k_0 *tali che*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq c$$

per ogni $k \geq k_0$, *allora la serie* $\sum a_k$ *è convergente.*

Dim. [1], p. 97. $\diamond$

Convergenza di successioni di funzioni. Sia S un insieme ed $f : S \to \mathbf{C}$ una funzione limitata. Definiamo la *norma del sup* di f come:

$$||f||_S = ||f|| = \sup_{s \in S} |f(s)|$$

Segue immediatamente dalla definizione che, date comunque due funzioni limitate $f, g : S \to \mathbf{C}$ e $c \in \mathbf{C}$, si ha $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ e $||cf|| = |c|\ ||f||$.

Sia $\{f_n : S \to \mathbf{C}\}$ una successione di funzioni limitate. Diremo che questa successione *converge uniformemente in* S se esiste una funzione limitata $f : S \to \mathbf{C}$ con le seguenti proprietà: dato comunque $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$||f_n - f|| < \epsilon$$

se $n \geq N$. Si osservi che, anche senza supporre f limitata, se $||f_n - f||$ è ben definita segue che f è limitata.

Diremo che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy se dato comunque $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$||f_n - f_m|| < \epsilon$$

se $m, n \geq N$.

Si osservi che, se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, allora per ogni $s \in S$ la successione di numeri complessi $\{f_n(s)\}$ soddisfa:

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leq ||f_n - f_m|| \qquad \forall \;\; n, m$$

e quindi è una successione di Cauchy e pertanto converge.

Teorema 1.3.5 *Se una successione $\{f_n\}$ di funzioni limitate su S è di Cauchy allora converge uniformemente in S.*

Dim. Per ogni $s \in S$ poniamo

$$f(s) = \lim_{n \to \infty} f_n(s)$$

Dato $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$|f_n(s) - f_m(s)| < \epsilon \qquad \forall \;\; s \in S$$

se $n, m \geq N$. Sia $n \geq N$. Dato $s \in S$ sia $m \geq N$ (dipendente da s) tale che

$$|f(s) - f_m(s)| < \epsilon$$

Allora:

$$\begin{aligned} |f(s) - f_n(s)| \leq |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_n(s)| < \\ < \epsilon + ||f_m - f_n|| < 2\epsilon \end{aligned}$$

Poiché ciò è vero per ogni $s \in S$ segue che

$$||f - f_n|| < 2\epsilon$$

e ciò conclude la dimostrazione. $\diamond$

Convergenza di serie di funzioni. Consideriamo una serie $\sum f_k$ di funzioni limitate su S, e sia

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

la somma parziale n-esima. Diremo che la serie *converge uniformemente in* S se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ converge uniformemente in S. Diremo che la serie $\sum f_k$ *converge assolutamente in* $s \in S$ se la serie numerica

$$\sum |f_k(s)|$$

converge. Diremo che $\sum f_k$ *converge assolutamente in* S se converge assolutamente in ogni $s \in S$.

Teorema 1.3.6 (Criterio del confronto) *Sia $\{c_k\}$ una successione di numeri reali nonnegativi tale che la serie $\sum c_k$ converga. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni limitate su S tali che $||f_k|| \leq c_k$ per ogni k. Allora la serie $\sum f_k$ converge uniformemente e assolutamente in S.*

Dim. Siano $m \leq n$. Allora le somme parziali soddisfano:

$$||s_n - s_m|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||f_k|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k$$

L'ipotesi sulla convergenza di $\sum c_k$ implica che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che $\sum_{n+1}^{m} c_k < \epsilon$ per ogni $n, m > N$. La disuguaglianza precedente implica quindi che la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è di Cauchy, e quindi l'uniforme convergenza della successione delle somme parziali segue. Lo stesso ragionamento dimostra anche la convergenza assoluta. $\diamond$

La dimostrazione del risultato seguente è lasciata come esercizio:

Teorema 1.3.7 *Sia $S \subset \mathbf{C}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue e limitate su S. Se la successione converge uniformemente in S allora la funzione limite f è continua in S.*

Convergenza di serie di potenze. I risultati precedenti verranno applicati allo studio della convergenza di serie di potenze, prendendo $f_k(z) = a_k z^k$, con $a_k \in \mathbf{C}$. Denoteremo indifferente con $D(a, r)$ oppure $D_a(r)$ il disco aperto di centro $a \in \mathbf{C}$ e raggio $r > 0$.

Teorema 1.3.8 *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri complessi, e sia $r > 0$ tale che la serie*

$$\sum_{k \geq 0} |a_k| r^k$$

converga. Allora la serie $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ converge assolutamente e uniformemente nel disco chiuso $\overline{D(0, r)}$.

Dim. È una caso particolare del criterio del confronto (Teorema 1.3.6). $\diamond$

Teorema 1.3.9 *Sia $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ una serie di potenze. Se la serie non converge assolutamente per qualche $w \in \mathbf{C}$ allora esiste un numero reale $r \geq 0$ tale che la serie converga assolutamente per $|z| < r$ e non converga assolutamente per $|z| > r$.*

Dim. Sia r l'estremo superiore dei numeri reali $s \geq 0$ tali che $\sum |a_k| s^k$ converge. Allora per ipotesi $r < \infty$ e $\sum |a_k||z|^k$ diverge se $|z| > r$, e converge se $|z| < r$, per il criterio del confronto. $\diamond$

Il numero r del teorema 1.3.9 è chiamato *raggio di convergenza* della serie di potenze $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$. Se la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbf{C}$ allora diremo che ha *raggio di convergenza infinito*. Quando il raggio di convergenza è 0 la serie converge assolutamente solo per $z = 0$.

Se la serie ha raggio di convergenza $r > 0$ si dirà una *serie convergente*. Il disco aperto $D(0, r)$ di centro l'origine e raggio r è detto *disco di convergenza* della serie. Più in generale se D è un disco aperto di centro l'origine e di raggio $\rho \leq r$, diremo che la serie *converge in* D.

Teorema 1.3.10 *Sia $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ una serie di potenze, e sia*

$$t = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

Allora il suo raggio di convergenza è

$$r = \frac{1}{t}$$

Dim. Dimostreremo il teorema nel caso $r \neq 0, \infty$. Il caso in cui $t = 0$ oppure $t = \infty$ si dimostra in modo simile ed è lasciato come esercizio. Dall'ipotesi segue che $|a_k| \leq t^k$ per $k \gg 0$. Quindi, se $|z| < \frac{1}{t}$, posto $c = t|z|$, si ha $0 < c < 1$ e

$$|a_k z^k| < c^k$$

e quindi $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ converge assolutamente per confronto con la serie geometrica $\sum c^k$. Quindi $r \geq \frac{1}{t}$.

D'altra parte, dato $\epsilon > 0$, esistono infiniti k tali che $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq t - \epsilon$. Pertanto per ogni siffatto k si ha $|a_k z^k| \geq 1$ se $|z| = \frac{1}{t-\epsilon}$ e quindi $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ non converge assolutamente. Ne consegue che si ha anche $r \leq \frac{1}{t-\epsilon}$ per ogni $\epsilon > 0$ e quindi $r \leq \frac{1}{t}$. $\diamond$

Osservazione 1.3.11 Con le notazioni introdotte nel corso della dimostrazione del Teorema 1.3.9, osserviamo che, per ogni $0 < s < r$, detto $C = s/r$, si ha:

$$|a_k| \leq \frac{C^k}{s^k} \leq \frac{C}{s^k}$$

Il seguente corollario è immediato.

Corollario 1.3.12 *Se* $\lim |a_k|^{\frac{1}{k}} = t$ *esiste, allora la serie* $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *ha raggio di convergenza* $r = \frac{1}{t}$.

Corollario 1.3.13 *Si supponga che la serie* $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *abbia raggio di convergenza* $r > 0$. *Allora esiste un numero reale* $A > 0$ *tale che*

$$|a_k| \leq A^k$$

per ogni k.

Dim. Prendiamo Sia $t = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$. Allora

$$|a_k| \leq t^k$$

per ogni k eccettuato al più un numero finito. Allora è possibile sostituire t con un $A > 0$ in modo che la disuguaglianza sia verificata per *tutti* i k. $\diamond$

Esempio 1.3.14 Il teorema 1.3.9 non dice cosa accade se $|z| = r$. Ad esempio la serie

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$$

ha raggio di convergenza 1. Per ogni c tale che $|c| = 1$ la serie dei moduli di $f(c)$ è la serie convergente $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$, e quindi, per il criterio del confronto, $f(c)$ converge per ogni c tale che $|c| = 1$.

D'altra parte anche la serie $g(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$ ha raggio di convergenza 1; ma $g(c)$ non converge per ogni c tale che $|c| = 1$ perché $|c^n| = 1$ e quindi c^n non tende a 0. Però per ogni z nel disco aperto $D(0,1)$ la funzione somma di $g(z)$ coincide con $\frac{1}{1-z}$ (ciò segue dalla Proposizione 1.4.1 che dimostreremo tra poco) e quindi, al tendere di z verso un qualsiasi $c \neq 1$ tale che $|c| = 1$ il valore di $g(z)$ tende al valore finito $(1-c)^{-1}$. Ciò è compatibile con i risultati che abbiamo dimostrato i quali danno informazioni solo sulla convergenza all'interno del disco di convergenza.

Consideriamo ora la serie

$$h(z) = \sum_{k\geq 1} z^{2^k}$$

che ha raggio di convergenza 1. Detta

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z^{2^k}$$

la somma parziale n-esima, si ha

$$\lim_{x \text{ reale } \to 1} s_n(x) = n$$

e quindi

$$\lim_{x \text{ reale } \to 1} h(x) = \infty$$

perché per ogni $n > 0$ esiste $\delta_n > 0$ tale che per $x > 1 - \delta$ si ha $s_n(x) > n - 1$ e quindi $h(x) > n - 1$. D'altra parte $h(z) = z^2 + fh(z^2)$ e quindi

$$\lim_{x \text{ reale } \to -1} h(x) = \infty$$

Analogamente, avendosi

$$h(z) = z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + h(z^{2^n})$$

si ha

$$\lim_{x \to \xi} h(x) = \infty$$

se ξ è una radice $2n$-esima di 1. Poiché le radici $2n$-esime dell'unità sono dense in S^1 la funzione h somma della serie non si estende a nessun punto di $\partial D_0(1) = S^1$.

1.4 Operazioni sulle serie convergenti

In questo paragrafo verificheremo che se si eseguono le operazioni definite per le serie formali (somma, prodotto, moltiplicazione per uno scalare, inversa, derivata termine a termine) su serie di potenze convergenti, si ottengono ancora serie convergenti.

Proposizione 1.4.1 *Siano $f = f(T)$ e $g = g(T)$ serie di potenze convergenti in un disco aperto $D_r(0)$, allora anche $f + g$ e fg sono convergenti nello stesso disco, e se $\alpha \in \mathbf{C}$, allora αf converge in $D(0, r)$. Inoltre per ogni $z \in D(0, r)$ si ha:*

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z), \quad (fg)(z) = f(z)g(z), \quad (\alpha f)(z) = \alpha f(z)$$

Dim. Diamo la dimostrazione nel caso del prodotto. Siano $f = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$, $g = \sum_{k\geq 0} b_k T^k$, e quindi

$$fg = \sum_{k\geq 0} c_k T^k, \quad \text{dove} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Sia $0 < s < r$. Poiché sia f che g hanno raggio di convergenza $\geq r$, per il criterio della radice esiste un numero positivo C tale che

$$|a_k| \leq \frac{C}{s^k}, \quad \text{e} \quad |b_k| \leq \frac{C}{s^k}$$

per ogni k. Quindi:

$$|c_k| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i|\ |b_{k-i}| \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{C}{s^i}\frac{C}{s^{k-i}} = (k+1)\frac{C^2}{s^k}$$

Segue che:

$$|c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{(k+1)^{\frac{1}{k}} C^{\frac{2}{k}}}{s}$$

Ma poiché $\lim_{k\to\infty}(k+1)^{\frac{1}{k}} C^{\frac{2}{k}} = 1$, segue che

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{s}$$

Poiché ciò è vero per ogni $0 < s < r$ segue che $\limsup |c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{r}$, e quindi la serie fg converge nel disco $D(0, r)$.

Si osservi che abbiamo anche dimostrato che la serie a termini reali positivi

$$\sum_{k\geq 0} \big(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\ |b_{k-i}|\big)|z^k|$$

converge per ogni $z \in D(0, r)$.

Siano

$$f_N(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_N t^N$$

e

$$g_N(T) = b_0 + b_1 T + \cdots + b_N T^N$$

i polinomi ottenuti per troncazione delle serie f e g. Allora, per ogni $z \in D(0,r)$ si ha:

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} f_N(z), \quad g(z) = \lim_{N\to\infty} g_N(z)$$

Inoltre:

$$|(fg)(z) - f_N(z)g_N(z)| \leq \sum_{k\geq N+1} \big(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\ |b_{k-i}|\big)|z^k|$$

ed il secondo membro tende a 0 al tendere di $N \to \infty$. Pertanto:

$$f(z)g(z) = \lim_N f_N(z)g_N(z) = (fg)(z)$$

e ciò conclude la dimostrazione nel caso del prodotto.

Gli altri casi sono più semplici e vengono lasciati come esercizio. $\diamond$

Denotiamo con $\mathbf{C}\{\{T\}\}$ il sottoinsieme di $\mathbf{C}[[T]]$ costituito dalle serie aventi raggio di convergenza positivo. Dalla proposizione precedente segue che $\mathbf{C}\{\{T\}\}$ è un sottoanello di $\mathbf{C}[[T]]$, che si chiama *anello delle serie convergenti*. Si hanno ovvie inclusioni che sono omomorfismi di anelli:

$$\mathbf{C}[T] \subset \mathbf{C}\{\{T\}\} \subset \mathbf{C}[[T]]$$

Teorema 1.4.2 *Supponiamo che* $f(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$ *e* $h(T) = \sum_{j\geq 1} b_j T^j$ *siano serie di potenze con* $o(h) > 0$*, aventi raggio di convergenza positivo. Allora la serie*

$$g(T) := f(h(T))$$

ha raggio di convergenza positivo. Sia $r > 0$ *tale che* f *converga nel disco* $D(0,r)$*, ed* $s > 0$ *sia tale che*

$$\sum_{k\geq 1} |b_k| s^k < r$$

Allora g *converge nel disco* $D(0,s)$*, e per ogni* $z \in D(0,s)$ *si ha:*

$$g(z) = f(h(z))$$

Dim. Ogni coefficiente della serie $g(T)$ è dominato in modulo dal corrispondente coefficiente della serie

$$(1) \qquad \sum_{k\geq 0} |a_k| (\sum_{j\geq 1} |b_j| T^j)^k$$

e per ipotesi questa serie converge assolutamente per $|T| < s$. Quindi $g(z)$ converge assolutamente per $|z| < s$.

Poniamo

$$f_N(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_N T^N$$

Allora ogni coefficiente della serie $g(T) - f_N(h(T))$ è dominato in modulo dal corrispondente coefficiente della serie:

$$\sum_{k>N} |a_k| (\sum_{j\geq 1} |b_j| T^j)^k$$

Dalla convergenza assoluta della serie (1) deduciamo che, dato $\epsilon > 0$, esiste N_0 tale che per ogni $N \geq N_0$ e $|z| \leq s$ si abbia:

$$|g(z) - f_N(h(z))| < \epsilon$$

Poiché la successione di polinomi $\{f_N(z)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(z)$ nel disco chiuso di raggio r, possiamo scegliere N_0 sufficientemente grande in modo che per $N \geq N_0$ si abbia

$$|f_N(h(z)) - f(h(z))| < \epsilon$$

e con ciò si dimostra che

$$|g(z) - f(h(z))| < 2\epsilon$$

per ogni $\epsilon > 0$, e quindi $g(z) - f(h(z)) = 0$. $\diamond$

Proposizione 1.4.3 *Sia f una serie di potenze a raggio di convergenza positivo con $o(f) = 0$. Allora anche la serie g tale che $fg = 1$ ha raggio di convergenza positivo.*

Dim. Non è restrittivo supporre che f abbia termine costante uguale a 1, salvo sostituire f con $a_0^{-1} f$. Quindi:

$$f(T) = 1 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots = 1 - h(T)$$

dove

$$h(T) = -a_1 T - a_2 T^2 - \cdots$$

e $o(h) \geq 1$. Si ha:

$$g(T) = \frac{1}{1 - h(T)} = 1 + h(T) + h(T)^2 + \cdots = u(h(T))$$

dove $u(T) = \sum_{k \geq 0} T^k$. Poiché $u(T)$ ha raggio di convergenza uguale a 1, segue che $u(h(T))$ ha raggio di convergenza positivo. $\diamond$

La serie $g(T)$ dell'enunciato precedente si denota con $f(T)^{-1}$. Il seguente corollario è immediato.

Corollario 1.4.4 *Se $f(T)$ e $\varphi(T)$ sono serie aventi raggio di convergenza positivo e $o(\varphi) = 0$, allora $f(T)\varphi(T)^{-1}$ è una serie a raggio di convergenza positivo.*

Proposizione 1.4.5 *Sia $f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$ una serie avente raggio di convergenza $r > 0$. Allora la serie*

$$f'(T) = \sum_{k \geq 1} k a_k T^{k-1}$$

ottenuta derivando f termine a termine (la serie derivata di f) ha raggio di convergenza r.

Dim. Si ha

$$\limsup |k a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |k|^{\frac{1}{k}} \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r}$$

e quindi la serie

$$\sum_{k \geq 1} k a_k T^k = T f'(T)$$

ha raggio di convergenza uguale a r. La conclusione segue. $\diamond$

1.5 Funzioni analitiche

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Una funzione

$$f : U \to \mathbf{C}$$

si dice *analitica in un punto* $z_0 \in U$ se esiste una serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$$

che converge assolutamente per $|z-z_0| < r$ per qualche $r > 0$, e tale che si abbia

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$$

per ogni $z \in U$ siffatto. f si dice *analitica in* U se lo è in ogni punto di U.

Se f è analitica in z_0 diremo anche che f *ha un'espansione (o uno sviluppo) in serie di potenze* in z_0. Un punto z_0 tale che $f(z_0) = 0$ si dice uno *zero* di f.

Teorema 1.5.1 *Se f è analitica in un aperto U allora f è continua in U.*

Dim. Segue facilmente dal teorema 1.3.7. Diamo comunque una dimostrazione diretta del teorema.

Sia $a \in U$ ed $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ in un disco aperto $D(a,r)$ di centro a e raggio $r > 0$; sia $f(a) = b$. Non è restrittivo supporre $a = 0 = b$. Quindi:

$$f(z) = \sum_{k\geq 1} a_k z^k = z\sum_{k\geq 1} a_k z^{k-1}$$

Se $|z| < r$ la serie $\sum_{k\geq 1} a_k z^k$ converge assolutamente. Pertanto, se $0 < \rho < r$ e $|z| < \rho$ si ha:

$$|f(z)| \leq \sum_{k\geq 1} |a_k||z|^k \leq |z|\sum_{k\geq 1} |a_k||z|^{k-1} \leq |z|\sum_{k\geq 1} |a_k|\rho^{k-1}$$

e quindi $|f(z)|$ tende a 0 al tendere di $|z|$ a 0. $\diamond$

Sono funzioni analitiche in tutto il piano i polinomi (in particolare le funzioni lineari, cioè della forma $f(z) = az + b$), la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, che verranno introdotte tra poco.

Proposizione 1.5.2 (i) *Sia U un aperto del piano complesso. Se f, g sono analitiche in U e $\alpha \in \mathbf{C}$, allora $f+g$, fg, αf sono analitiche in U. Inoltre $\frac{f}{g}$ è definita ed analitica in ogni aperto contenuto nel sottoinsieme degli $z \in U$ tali che $g(z) \neq 0$.*

(ii) *Se $V \subset \mathbf{C}$ è un aperto e $h : V \to U$ ed $f : U \to \mathbf{C}$ sono analitiche, allora $f \circ h$ è analitica in V.*

Dim. (i) segue immediatamente dalle proprietà di convergenza dimostrate per le serie di potenze nel §1.4.

(ii) Se $z_0 \in V$ e $h(z_0) = w_0$, allora:

$$h(z) = w_0 + \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k$$

e quindi la funzione $h(z) - w_0$ è rappresentata in un intorno di z_0 da una serie priva di termine costante. Se

$$f(w) = \sum_{n \geq 0} a_n (w - w_0)^n$$

in un intorno di w_0 allora applicando il teorema 1.4.2 possiamo sostituire la serie $h(z) - w_0 = \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k$ al posto di $w - w_0$ e ottenere:

$$f(h(z)) = \sum_{n \geq 0} a_n (\sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k)^n$$

che è uno sviluppo in serie di $f \circ h$ in un intorno di z_0. $\diamond$

Dalla Proposizione 1.5.2 segue in particolare che una funzione razionale $\frac{P(z)}{Q(z)}$, dove $P, Q \in \mathbf{C}[z]$ e $\neq 0$, è ben definita ed analitica in tutti i punti di $z \in \mathbf{C}$ in cui $Q(z) \neq 0$.

La seguente proposizione ci dice che sono analitiche le funzioni definite da serie di potenze.

Proposizione 1.5.3 *Sia $a \in \mathbf{C}$ e $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$ una serie di potenze convergente assolutamente nel disco aperto $D(a, r)$ per qualche $r > 0$. Allora la funzione $f : D(a, r) \to \mathbf{C}$ definita dalla serie è analitica.*

Dim. Non è restrittivo supporre $a = 0$, e quindi che si abbia $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ in $D(0, r)$. Sia $z_0 \in D(0, r)$, e sia $s > 0$ tale che $|z_0| + s < r$. Scriviamo

$$z = z_0 + (z - z_0)$$

e quindi:

$$z^k = [z_0 + (z - z_0)]^k$$

Possiamo pertanto riscrivere:

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k \Big[\sum_{j\geq 0}^{k} \binom{k}{j} z_0^{k-j} (z - z_0)^j \Big]$$

Se $|z - z_0| < s$ allora $|z_0| + |z - z_0| < r$ e quindi la serie

$$\sum_{k\geq 0} |a_k| [|z_0| + |z - z_0|]^k = \sum_{k\geq 0} |a_k| \Big[\sum_{j\geq 0}^{k} \binom{k}{j} |z_0|^{k-j} |z - z_0|^j \Big]$$

converge. Scambiando l'ordine di sommatoria otteniamo che la serie:

$$\sum_{j\geq 0} \Big[\sum_{k\geq j} a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \Big] (z - z_0)^j$$

converge assolutamente ad $f(z)$ per $|z - z_0| < s$. $\diamond$

Teorema 1.5.4 *Se f è analitica in U allora f è olomorfa in U e la sua derivata f' è una funzione analitica in U.*

Dim. La tesi da dimostrare è locale, cioè è sufficiente dimostrare che vale in qualsiasi punto $a \in U$. Non è restrittivo supporre $a = 0$. Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ in un disco aperto $D(0, r)$, $r > 0$. Sia z tale che $|z| < r$ e sia $\delta > 0$ tale che $|z| + \delta < r$. Per ogni numero complesso h tale che $|h| < \delta$ abbiamo:

$$\begin{aligned} f(z + h) &= \textstyle\sum_{n\geq 0} a_n (z + h)^n \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0} a_n (z^n + n z^{n-1} h + h^2 P_n(z, h)) \end{aligned}$$

dove $P_n(z, h)$ è un polinomio in z e h, a coefficienti interi positivi; precisamente:

$$P_n(z, h) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k}$$

In particolare la seguente stima è soddisfatta:

$$|P_n(z, h)| \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta^{k-2} |z|^{n-k} = P_n(|z|, \delta)$$

Possiamo scrivere:

$$f(z+h) - f(z) - \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} h = h^2 \sum_{n\geq 2} a_n P_n(z,h)$$

dove la serie a secondo membro è assolutamente convergente perché lo è quella a primo membro. Dividendo per h otteniamo:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = h \sum_{n\geq 2} a_n P_n(z,h)$$

Per $|h| < \delta$ abbiamo:

$$\begin{aligned} |\textstyle\sum_{n\geq 2} a_n P_n(z,h)| &\leq \textstyle\sum_{n\geq 2} |a_n||P_n(z,h)| \\ &\leq \textstyle\sum_{n\geq 2} |a_n| P_n(|z|,\delta) \end{aligned}$$

dove l'ultima espressione non dipende da h. Quindi:

$$|h \sum_{n\geq 2} a_n P_n(z,h)| \leq |h| \sum_{n\geq 2} |a_n| P_n(|z|,\delta)$$

Al tendere di h a 0 il secondo membro tende a 0, e quindi

$$\lim_{h\to 0} |h \sum_{n\geq 2} a_n P_n(z,h)| = 0$$

Ciò dimostra che la funzione f è olomorfa in 0, e che la sua derivata coincide con la somma della serie $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$, che ha lo stesso raggio di convergenza di f, per la Proposizione 1.4.5. $\diamond$

Osservazione 1.5.5 Usando il teorema integrale di Cauchy dimostreremo nel Cap. 2 che, viceversa, ogni funzione olomorfa è analitica.

Il seguente corollario dicende immediatamente dal teorema:

Corollario 1.5.6 *Se f è analitica in un aperto U allora f possiede derivate di ogni ordine che sono funzioni analitiche in U.*

Supponiamo che la funzione $f(z)$ sia analitica in un intorno di $a \in \mathbf{C}$ e che in a si abbia:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

Allora dalla dimostrazione del teorema (4.5) segue che la derivata n-esima di f si esprime in un intorno di a come:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq n} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z-a)^{k-n}$$

In particolare si ha:

$$f^{(n)}(a) = n! a_n$$

e quindi per ogni n:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{1.6}$$

In particolare la successione dei coefficienti $\{a_k\}$ è univocamente determinata da f e da a.

Definizione 1.5.7 *Sia $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione sull'aperto U a valori complessi. Una primitiva per f è una funzione g olomorfa in U e tale che $g'(z) = f(z)$ per ogni $z \in U$.*

È ovvio che una primitiva, se esiste, è determinata a meno di una costante additiva.

Proposizione 1.5.8 *Sia f una funzione analitica che ha uno sviluppo in serie in un disco $D(a,r)$. Allora f possiede una primitiva in $D(a,r)$ che è analitica.*

Dim. Supponiamo che si abbia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

in $D(a,r)$. Allora la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} (z-a)^{k+1} \tag{1.7}$$

converge nel disco $D(a,r)$ perché i suoi coefficienti sono maggiorati in modulo dai coefficienti della serie $f(z)$. Inoltre, detta $g(z)$ la funzione somma della serie (1.7), si ha $g'(z) = f(z)$. Quindi g è una primitiva di f in $D(a,r)$. Per la Proposizione 1.5.8 g è analitica in $D(a,r)$. $\diamond$

Osservazione 1.5.9 Se f è analitica in un aperto U di $\mathbf{C}$, la Proposizione 1.5.8 implica che per ogni punto $a \in U$ esiste un disco $D(a,r) \subset U$ tale che la restrizione di f a $D(a,r)$ possieda una primitiva. Ciò non significa però che f possiede una primitiva in tutto U. In altre parole, non è necessariamente vero che è possibile trovare primitive di f nelle vicinanze di ogni punto di U in modo che si incollino per definire un'unica funzione primitiva di f in tutto U. Un esempio è fornito dalla funzione $f(z) = 1/z$ analitica in $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Quest'esempio verrà discusso in dettaglio più avanti (cfr. Esempio 1.9.4).

1.6 Esempi

1. Dalla proposizione 1.5.2 segue che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

è analitica nell'aperto $U = \mathbf{C}\backslash\{0\}$. Il suo sviluppo in serie nell'origine è

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} z^k$$

Questa serie ha raggio di convergenza $r_0 = 1$ e quindi rappresenta la funzione f nel disco $D(0,1)$. Consideriamo un qualsiasi punto $b \in D(0,1)$, $b \neq 0$. Dalla dimostrazione della proposizione 1.5.8 segue che lo sviluppo in serie di $f(z)$ in b è:

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} b_j (z-b)^j$$

dove

$$b_j = \sum_{k\geq j} \binom{k}{j} b^{k-j}$$

Questa serie converge a $(1-b)^{-(j+1)}$ (Esempio 1.2.1) e pertanto lo sviluppo in serie di $f(z)$ in b si può riscrivere come:

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} (1-b)^{-(j+1)} (z-b)^j$$

Il raggio di convergenza r_b di questa serie è dato da:

$$\frac{1}{r_b} = \lim_{j\to\infty} (|1-b|^{-(j+1)})^{\frac{1}{j}} = |1-b|^{-1}$$

cioè $r_b = |1-b|$, che è la distanza di b dal punto 1 in cui la funzione $f(z)$ non è definita. Si osservi che $D(b, r_b) \not\subset D(0,1)$ a meno che b non sia reale e $0 < b < 1$.

2. *Esponenziale e funzioni circolari* - Vogliamo determinare quali sono le serie di potenze

$$E(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k \in \mathbf{C}[[T]]$$

tali che $E'(T) = E(T)$, e $E(0) = a_0 = 1$.

Poiché

$$E'(T) = a_1 + 2a_2T + 3a_3T^2 + \cdots$$

otteniamo $a_0 = 1$ e $k!a_k = 1$, e quindi deduciamo $a_k = \frac{1}{k!}$. In particolare la serie cercata $E(T)$ esiste ed è unica. Si ha:

$$E(T) := \sum_{k\geq 0} \frac{T^k}{k!}$$

Poiché $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$, vediamo che $E(T)$ ha raggio di convergenza $r = \infty$. La *funzione esponenziale* e^z è definita come la funzione olomorfa in tutto $\mathbf{C}$ somma della serie $E(z)$.

È facile dedurre le principali proprietà di e^z direttamente dalla definizione. Dimostriamo ad esempio l'identità

$$e^{a+b} = e^a\ e^b \qquad \forall a, b$$

Sia $c \in \mathbf{C}$. Si ha:

$$(e^z\ e^{c-z})' = e^z\ e^{c-z} - e^z\ e^{c-z} = 0$$

e quindi $e^z\ e^{c-z} = \text{cost.}$; prendendo $z = 0$ deduciamo che

$$e^z\ e^{c-z} = e^0 e^c = e^c$$

e ponendo $z = a$ e $c = b + a$ si conclude.

In particolare $e^z\ e^{-z} = e^0 = 1$ e quindi $e^z \neq 0$ per ogni z e $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Inoltre $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ perché tutti i coefficienti di $E(z)$ sono reali. In particolare, se $y \in \mathbf{R}$:

$$|e^{iy}|^2 = e^{iy}\ e^{-iy} = 1$$

cioè $|e^{iy}| = 1$. Inoltre, essendo $e^{x+iy} = e^x\ e^{iy}$,si ha $|e^{x+iy}| = e^x$, e quindi $|e^{x+iy}| = 1$ se e solo se $x = 0$ cioè se e solo se $z = iy$ è puramente immaginario.

Per mezzo della funzione esponenziale è possibile definire le *funzioni circolari*, o *trigonometriche*, ponendo:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{1.8}$$

Dalle definizioni si deducono facilmente tutte le principali proprietà di queste funzioni. In particolare:

$$(\cos z)' = -\sin z; \quad (\sin z)' = \cos z$$

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$$

Si ha inoltre

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{1.9}$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$. Calcolando si trovano gli sviluppi in serie:

$$\cos z = 1 - \tfrac{z^2}{2!} + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \cdots$$

$$\sin z = z - \tfrac{z^3}{3!} + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \cdots$$

Per $z = x$ reale queste serie si riducono agli usuali sviluppi in serie di Taylor di $\cos x$ e $\sin x$, e quindi le funzioni trigonometriche complesse prolungano a $\mathbf{C}$ le funzioni trigonometriche già conosciute nel caso reale.

Studiamo la *periodicità* di e^z. Sia $p \in \mathbf{C}$ un periodo, cioè un numero complesso tale che $e^{z+p} = e^z$ per ogni $z \in \mathbf{C}$. Ciò avviene se e solo se $e^p = 1$. Quindi $p = \mathrm{i}t$, t reale. D'altra parte

$$e^{it} = \cos t + i \sin t = 1$$

significa $\cos t = 1,\ \ \sin t = 0$, il che avviene se e solo se $t = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

Quindi i periodi di e^z sono tutti e soli i multipli interi di $2\pi i$. Se ne deduce che ogni numero complesso $z \neq 0$ può essere espresso nella forma:

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

per qualche $\theta \in \mathbf{R}$ che è univocamente determinato solo a meno di multipli interi di 2π. In altre parole si ha anche:

$$z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$$

per ogni $k \in \mathbf{Z}$. L'insieme di numeri reali:

$$\{\theta + 2k\pi : \ k \in \mathbf{Z}\}$$

è detto *l'argomento* di z, e si denota $\arg(z)$. Ogni $\theta \in \arg(z)$ è detto una *determinazione* dell'argomento di z. L'unica determinazione di $\arg(z)$ che soddisfa la condizione $0 \leq \theta < 2\pi$ si dice *determinazione principale dell'argomento di* z e si denota con $\mathrm{Arg}(z)$. Pertanto possiamo scrivere:

$$\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi : \ k \in \mathbf{Z}\}$$

Si noti che si ha

$$e^{2\pi i} = 1 \tag{1.10}$$

Questa identità è detta *formula di Eulero*.

3. *Il logaritmo*

Sia $w \in \mathbf{C}$. Un *logaritmo* di w è un numero complesso z tale che $e^z = w$. Ovviamente, poiché $e^z \neq 0$ il numero $w = 0$ non ha logaritmo. Se $w \neq 0$ allora l'equazione $e^{x+iy} = w$ è equivalente a

$$e^x = |w|, \quad e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

La prima equazione possiede l'unica soluzione $x = \log|w|$. La seconda equazione ha le infinite soluzioni $y \in \arg w$.

In conclusione, ogni $w = |w|(\cos\mathrm{Arg}(w) + i\sin\mathrm{Arg}(w)) \neq 0$ possiede infinite determinazioni del logaritmo, della forma:

$$\log w = \log|w| + i(\mathrm{Arg}(w) + 2k\pi), \qquad k \in \mathbf{Z}$$

La determinazione corrispondente a $k = 0$ si dice *determinazione principale* del logaritmo di w e si denota con $\mathrm{Log}(w)$.

4. Siano $0 \neq a, z \in \mathbf{C}$. Diremo che $w \in \mathbf{C}$ soddisfa l'identità:

$$z^a = w$$

se esiste una determinazione $\log(z)$ del logaritmo di z tale che

$$w = e^{a \log(z)}$$

Per definizione z^a non è univocamente determinato, ma dipende dalla scelta della determinazione $\log(z)$. La *determinazione principale* di z^a si definisce come

$$w = e^{a\mathrm{Log}(z)}$$

cioè come quella corrispondente alla determinazione principale $\mathrm{Log}(z)$.

Si osservi che, se $n \geq 2$ è un intero, allora

$$z^n = e^{n \log(z)} = e^{n[\log(z)+2k\pi i]}$$

è univocamente determinato, e quindi la definizione che abbiamo dato è compatibile con la definizione di potenza n-esima come prodotto di un elemento per se stesso nel campo dei numeri complessi.

D'altra parte, se si prende $a = \frac{1}{n}$, dove $n \geq 2$ è intero, allora $z^{1/n}$ possiede n le determinazioni distinte

$$e^{[\mathrm{Log}(z)+2k\pi i]/n} = e^{\frac{\mathrm{Log}(z)}{n}+\frac{2k\pi i}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

che si dicono *le radici n-esime di z*. Nel caso $z = 1$ si ottengono *le radici n-esime dell'unità:*

$$e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

5. *Le funzioni iperboliche* - Le classiche funzioni iperboliche di variabile reale si estendono in modo naturale a funzioni intere ponendo:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{1.11}$$

L'identità già valida nel caso reale:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

si estende a questo caso in modo ovvio. Sussiste inoltre l'identità:

$$|\sin(x+iy)|^2 = |\sin x|^2 + |\sinh y|^2 \tag{1.12}$$

la cui verifica elementare è lasciata al lettore come esercizio.

Si osservi che

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i\sin(iz)$$

6. I *numeri di Bernoulli* B_k sono definiti dall'identità

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$$

Si osservi che il primo membro è una funzione olomorfa nel disco $D(0, 2\pi)$. Per calcolare i B_k esplicitiamo l'identità:

$$\frac{ze^z}{e^z-1} = \frac{z}{e^z-1} + z$$

ottenendo:

$$\sum_{k\geq 0} \left[\sum_{h=0,\ldots,k} \frac{B_h}{h!(k-h)!} \right] z^k = z + \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$$

Da qui si calcolano i B_k induttivamente. I primi valori sono:

$$B_0 = 1 \quad B_1 = \tfrac{-1}{2}$$

$$B_2 = \tfrac{1}{6} \quad B_3 = 0$$

$$B_4 = \tfrac{-1}{30} \quad B_5 = 0$$

$$B_6 = \tfrac{1}{42} \quad B_7 = 0$$

In generale $B_{2k+1} = 0$ per ogni $k \geq 1$. Ciò si deduce dal fatto che la funzione

$$\frac{z}{2} + \frac{z}{e^z-1} = 1 + \sum_{k\geq 2} \frac{B_k}{k!} z^k$$

è pari.

7. La funzione trascendente $\tan z = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ ha il seguente sviluppo in serie nell'origine:

$$\tan z = \sum_{k\geq 1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$$

e ha raggio di convergenza $\frac{\pi}{2}$.

1.7 Ordine e indice di ramificazione

Sia f una funzione analitica in un intorno di un punto $a \in \mathbf{C}$ e sia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

il suo sviluppo in serie in a. Supponiamo che f non sia identicamente nulla in un intorno di a. In tal caso i coefficienti a_k non sono tutti nulli.

L'ordine di f in a è definito come il più piccolo esponente k tale che $a_k \neq 0$, e si denota $o_a(f)$.

E' evidente che $o_a(f)$ coincide con l'ordine della serie $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$ secondo la definizione data nel §1. Nel seguente lemma sono raccolte le principali proprietà della nozione di ordine.

Lemma 1.7.1 *Sia f una funzione analitica non costante in un intorno aperto A di $a \in \mathbf{C}$. Allora:*

(i) *$o_a(f) > 0$ se e solo se $f(a) = 0$.*

(ii) *Esiste un aperto $U(a) \subset A$ contenente a tale che $o_z(f) = 0$ per ogni $z \in U(a)$, $z \neq a$.*

(iii) *Posto $f' = \frac{df}{dz}$ si ha:*

$$o_a(f') = o_a(f - f(a)) - 1$$

(iv) *Se g è una funzione analitica e non costante su un aperto B di $\mathbf{C}$ tale che $g(B) \subset A$, e se per qualche $b \in B$ si ha $g(b) = a$, $g'(b) \neq 0$, allora:*

$$o_b(f \circ g) = o_a(f)$$

Dim. (i) è ovvia.

(ii) Se $o_a(f) = 0$ la conclusione è ovvia per la continuità di f. Supponiamo che a sia uno zero di f, cioè che si abbia $a_0 = f(a) = 0$. Per ipotesi f non è identicamente nulla in un intorno di a; sia $h = o_a(f) > 0$. Allora possiamo scrivere:

$$f(z) = \sum_{k \geq h} a_k (z-a)^k = (z-a)^h \sum_{k \geq h} a_k (z-a)^{k-h}$$

La serie $\sum_{k \geq h} a_k(z-a)^{k-h}$ converge in un intorno di a ad una funzione analitica $g(z)$. Poiché $g(a) = a_h \neq 0$, esiste $r > 0$ tale che $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in D(a,r)$. Ma allora $f(z) = (z-a)g(z) \neq 0$ per ogni $z \in D(a,r)$, $z \neq a$. Quindi il punto a è isolato nell'insieme degli zeri di f.

(iii) è immediata.

(iv) Se $o_a(f) = 0$ la conclusione è ovvia. Supponiamo $o_a(f) > 0$ e procediamo per induzione su $o_a(f)$. Per la (iii) si ha:

$$o_b(f \circ g) = 1 + o_b((f \circ g)') = 1 + o_b[f'(g(w))g'(w)] =$$

$$= 1 + o_b(f' \circ g) + o_b(g') = 1 + o_b(f' \circ g)$$

Poiché dalla (iii) segue che $o_a(f') = o_a(f) - 1$, per l'ipotesi induttiva si ha $o_b(f' \circ g) = o_a(f')$ e quindi:

$$o_b(f \circ g) = 1 + o_a(f') = o_a(f)$$

$\diamond$

Insieme alla nozione di ordine è spesso utile considerare anche la seguente:

Definizione 1.7.2 *Sia $f : A \to \mathbf{C}$ una funzione analitica definita su un aperto A di $\mathbf{C}$ e sia $a \in A$.* L'indice di ramificazione *di f in a è*

$$e_f(a) = o_a(f(z) - f(a))$$

Il punto a si dice di ramificazione *per f se $e_f(a) \geq 2$. In tal caso diremo che f* ramifica *in a.*

Dal Lemma 1.7.1 segue che si ha

$$e_f(a) = o_a(f') + 1$$

e che l'insieme dei punti di ramificazione di f è un sottoinsieme discreto di A.

Esempio 1.7.3 Per un fissato intero $n \geq 2$ ed una costante $c \in \mathbf{C}$ la funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definita da $f(z) = z^n + c$, ramifica solo nel punto $z = 0$ con indice di ramificazione n. Se invece $n = 1$ la f non ramifica in alcun punto.

Il Lemma seguente generalizza 1.7.1(iv):

Lemma 1.7.4 *Sia f una funzione analitica non costante in un intorno aperto A di $a \in \mathbf{C}$. Se g è una funzione olomorfa e non costante su un aperto B di $\mathbf{C}$ tale che $g(B) \subset A$, e se per qualche $b \in B$ si ha $g(b) = a$ allora:*

$$e_{f \circ g}(b) = e_f(a) e_g(b)$$

Dim. Si ha

$$e_{f \circ g}(b) = 1 + o_b((f \circ g)') = 1 + o_b[(f' \circ g) g'] = 1 + o_b(f' \circ g) + o_b(g') = o_b(f' \circ g) + e_g(b)$$

Se $e_f(a) = 1$ allora $o_a(f') = 0$ e quindi si ha anche $o_b(f' \circ g) = 0$. Dall'uguaglianza precedente segue che $e_{f \circ g}(b) = e_g(b)$ e la conclusione è vera in questo caso. Supponiamo $e_f(a) \geq 2$ e procediamo per induzione su $e_f(a)$. Per l'ipotesi induttiva si ha:

$$o_b(f' \circ g) = e_{f' \circ g}(b) = e_{f'}(a) e_g(b) = [e_f(a) - 1] e_g(b)$$

e quindi:

$$e_{f \circ g}(b) = o_b(f' \circ g) + e_g(b) = [e_f(a) - 1] e_g(b) + e_g(b) = e_f(a) e_g(b)$$

◇

Si osservi che nel caso in cui $a = 0 = f(a)$ il Lemma afferma che

$$o_b(f \circ g) = o_0(f) o_b(g)$$

1.8 Zeri delle funzioni analitiche

In questo paragrafo dimostreremo che due funzioni analitiche che coincidono su un insieme abbastanza grande, in un senso che preciseremo, coincidono identicamente. Questa proprietà generalizza una proprietà ben nota dei polinomi: se due polinomi di grado $\leq n$ assumono gli stessi valori in $n + 1$ punti distinti di $\mathbf{C}$, allora concidono.

Teorema 1.8.1 (Principio del prolungamento analitico) *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso, $z_0 \in U$, ed $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione analitica. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *$f^{(k)}(z_0) = 0$ per ogni $k \geq 0$.*

(ii) *f è identicamente nulla in un intorno di z_0.*

(iii) *f è identicamente nulla in U.*

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$ lo sviluppo in serie di f in z_0. Dalla (1.6) segue che $a_k = 0$ per ogni k, e quindi $f(z) = 0$ in un intorno di z_0.

(ii) $\Rightarrow$ (i) e (iii) $\Rightarrow$ (i) sono ovvie.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Dobbiamo dimostrare che l'insieme

$$\Delta = \{a \in U : f \ \text{ è identicamente nulla in un intorno di } a\}$$

coincide con U. Osserviamo che $z_0 \in \Delta$ e quindi $\Delta \neq \emptyset$. Pertanto, poiché U è connesso, sarà sufficiente dimostrare che Δ è aperto e chiuso in U.

Δ è aperto per definizione.

Sia $c \in \overline{\Delta}$. Allora esiste una successione $\{c_n\} \to c$ tale che $c_n \in \Delta$. In ogni punto c_n è verificata la condizione (ii), e quindi anche la (i), cioè $f^{(k)}(c_n) = 0$ per ogni $k \geq 0$ e per ogni n. Ma allora, essendo le derivate $f^{(k)}(z)$ funzioni continue, si ha anche $f^{(k)}(c) = 0$ per ogni k, cioè in c è soddisfatta la condizione (i). Ma allora anche la (ii) è soddisfatta, cioè $c \in \Delta$, e quindi Δ è chiuso. $\diamond$

Corollario 1.8.2 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso. Se f, g sono analitiche in U e coincidono in un intorno di un punto $z_0 \in U$ allora coincidono identicamente in tutto U.*

Dim. Basta applicare il teorema alla funzione $f - g$. $\diamond$

Applicando il Teorema 1.8.1 deduciamo il seguente risultato:

Teorema 1.8.3 (Principio d'identità delle funzioni analitiche) *Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto connesso ed $f : U \to \mathbf{C}$ è analitica e non è identicamente nulla, l'insieme degli zeri di f è un insieme discreto, cioè tutti i suoi punti sono isolati.*

Dim. Supponiamo che $f(a) = 0$ per qualche $a \in U$. Per il teorema 1.8.1 f non è identicamente nulla in un intorno di a, e quindi, per il Lemma 1.7.1(ii), a possiede un intorno $V \subset U$ tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in V$, $z \neq a$. Quindi a è isolato nell'insieme degli zeri di f. $\diamond$

Abbiamo il seguente immediato

Corollario 1.8.4 *Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto connesso ed $f, g : U \to \mathbf{C}$ analitiche, allora l'insieme*

$$S = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$$

è discreto oppure $S = U$. In particolare, se $f : U \to \mathbf{C}$ è analitica e $c \in \mathbf{C}$, allora

$$f^{-1}(c) = \{z \in U : f(z) = c\}$$

se non è vuoto, è un insieme discreto oppure $f^{-1}(c) = U$, cioè f è costante.

Esempio 1.8.5 (La serie binomiale) Sia $\alpha \neq 0$ un numero complesso. Definiamo i *coefficienti binomiali* come:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

per $k \geq 1$, e $\binom{\alpha}{0} = 1$. Definiamo la *serie binomiale* nel modo seguente:

$$B_\alpha(t) = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} t^k$$

Lemma 1.8.6 *Se α non è uguale ad un intero ≥ 0, il raggio di convergenza di $B_\alpha(t)$ è uguale ad 1.*

Dim. L'ipotesi su α implica che nessuno dei coefficienti $\binom{\alpha}{k}$ è zero. Si ha:

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = |1 - \frac{\alpha+1}{k+1}|$$

che converge ad 1 per $k \to \infty$. La conclusione segue dal criterio del rapporto. $\diamond$

Se m è un intero positivo segue dal lemma che la serie $B_{\frac{1}{m}}(x)$ converge assolutamente per x reale tale che $|x| < 1$. D'altra parte è ben noto dai corsi di analisi matematica che la somma di tale serie soddisfa $B_{\frac{1}{m}}(x)^m = 1+x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ tale che $|x| < 1$. Dal principio di identità delle funzioni olomorfe discende quindi che nel disco aperto $D(0,1) \subset \mathbf{C}$ la funzione somma della serie $B_{\frac{1}{m}}(z)$ soddisfa

$$B_{\frac{1}{m}}(z)^m = 1 + z$$

$\diamond$

1.9 Proprietà geometriche delle funzioni analitiche

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, e f analitica su U. Diremo f un *isomorfismo analitico* se la sua immagine $V = f(U)$ è un aperto di $\mathbf{C}$ ed esiste una funzione analitica $g : V \to U$ tale che $f \circ g = 1_V$ e $g \circ f = 1_U$, cioè tale che f e g siano funzioni inverse una dell'altra.

Diremo che la funzione analitica $f : U \to \mathbf{C}$ è un *isomorfismo analitico locale in un punto* $z_0 \in U$ se esiste un intorno aperto $U_0 \subset U$ di z_0 tale che la restrizione di f ad U_0 sia un isomorfismo analitico. Diremo f un *isomorfismo analitico locale* se è un isomorfismo analitico locale in ogni punto $z \in U$.

Ovviamente ogni isomorfismo analitico è anche un isomorfismo analitico locale. Dalle definizioni segue inoltre che un isomorfismo analitico locale è un'applicazione aperta.

Dimostriamo un importante risultato preliminare su cui baseremo le nostre considerazioni successive.

Proposizione 1.9.1 *Sia $f(z)$ una serie di potenze tale che $o(f) = 1$. Allora esiste un'unica serie di potenze $g(z)$ tale che $o(g) = 1$ e $f(g(z)) = z$, e la serie $g(z)$ soddisfa anche l'identità $g(f(z)) = z$. Se f è convergente allora anche g è convergente. La serie $g(z)$ si dice* inversa formale *di f.*

Dim. Per ipotesi possiamo supporre che la serie f sia della forma:

$$f(z) = a_1 z - \sum_{k \geq 2} a_k z^k$$

con $a_1 \neq 0$. Dobbiamo trovare una serie di potenze $g(z) = \sum_{k \geq 1} b_k z^k$ tale che $b_1 \neq 0$ e

$$a_1 g(z) - a_2 g(z)^2 - a_3 g(z)^3 - \cdots = z$$

Qust'uguaglianza corrisponde ad infinite equazioni nei coefficienti incogniti $b_1, b_2, \ldots$ ottenute eguagliando tra loro i coefficienti delle serie a primo e secondo membro. Queste equazioni sono della forma:

$$a_1 b_1 = 1$$

$$a_1 b_k - P_k(a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{k-1}) = 0 \qquad k \geq 2$$

dove P_k è un polinomio a coefficienti interi positivi. Poiché $a_1 \neq 0$ se ne deduce immediatamente che queste equazioni possono essere risolte induttivamente, individuando univocamente i coefficienti b_k. Quindi l'nversa formale $g(z)$ esiste ed è unica.

Dimostriamo che $g(f(z)) = z$. Applicando la stessa dimostrazione a g deduciamo che esiste una serie di potenze $h(z)$ tale che $o(h) = 1$ e $g(h(z)) = z$. Ma allora si ha:

$$g(f(z)) = g(f(g(h(z)))) = g(h(z)) = z$$

come si voleva, e $f(z) = h(z)$ è l'inversa formale di $g(z)$.

Supponiamo ora che f sia convergente. Possiamo supporre $a_1 = 1$. Infatti, se $a_1 \neq 0, 1$ poniamo:

$$\tilde{f}(w) := f(a_1^{-1}w) = w - \sum_{k\geq 2} \tilde{a}_k w^k$$

che è convergente per $|w| < |a_1|r$, dove r è il raggio di convergenza di f. Sia $\tilde{g}(w)$ l'inversa formale di $\tilde{f}(w)$. Se questa è convergente allora anche la serie $g(z) = a_1^{-1}\tilde{g}(z)$ lo è, e questa è proprio l'inversa formale di $f(z)$ perché abbiamo:

$$f(g(z)) = f(a_1^{-1}\tilde{g}(z)) = \tilde{f}(\tilde{g}(z)) = z$$

Supponiamo dunque che $a_1 = 1$. Sia

$$f^*(z) = z - \sum_{k\geq 2} a_k^* z^k$$

una serie di potenze con a_k^* reale ≥ 0 e tale che $|a_k| \leq a_k^*$ per ogni k. Sia $\varphi(z) = \sum_{k\geq 1} c_k z^k$ l'inversa formale di $f^*(z)$.

Si ha $c_1 = 1$ e

$$c_k - P_k(a_2^*, \ldots, a_k^*, c_1, \ldots, c_{k-1}) = 0$$

con gli stessi polinomi P_k di prima. Per induzione segue allora che ogni c_k è reale ≥ 0, e che

$$|b_k| \leq c_k$$

Per concludere sarà quindi sufficiente scegliere la serie f^* in modo che $\varphi(z)$ abbia raggio di convergenza positivo. Poiché esiste $A > 0$ tale che

$$|a_k| \leq A^k$$

per ogni $k \geq 2$, poniamo:

$$f^*(z) = z - \sum_{k\geq 2} A^k z^k = z - \frac{A^2 z^2}{1 - Az}$$

La serie $\varphi(z)$ soddisfa $f^*(\varphi(z)) = z$, cioè:

$$\varphi(z) - \frac{A^2\varphi(z)^2}{1 - A\varphi(z)} = z$$

che è equivalente all'identità quadratica:

$$(A^2 + A)\varphi(z)^2 - (1 + Az)\varphi(z) + z = 0$$

In altre parole $\varphi(z)$ è una soluzione in $\mathbf{C}[[z]]$ dell'equazione:

$$(A^2 + A)X^2 - (1 + Az)X + z = 0$$

Le soluzioni di quest'equazione sono:

$$\varphi(z) = \frac{(1 + Az) \pm \sqrt{(1 + Az)^2 - 4z(A^2 + A)}}{2(A^2 + A)} \tag{1.13}$$

purché il secondo membro abbia significato in $\mathbf{C}[[z]]$. L'espressione sotto radice è della forma:

$$(1 + Az)^2 \left(1 - \frac{4z(A^2 + A)}{(1 + Az)^2}\right)$$

La funzione

$$1 - \frac{4z(A^2 + A)}{(1 + Az)^2}$$

è somma di una serie di potenze della forma $1+h(z)$ con $o(h) \geq 1$. Sostituendo $h(z)$ nella serie binomiale $B_{\frac{1}{2}}(z)$ otteniamo una serie $B_{\frac{1}{2}}(h(z))$ convergente ad $(1+h(z))^{\frac{1}{2}}$. Sostituendo otteniamo cosi' le espressioni (1.13) di $\varphi(z)$ sotto forma di composizione di serie convergenti, e pertanto convergenti. Una delle due è necessariamente l'inversa formale di f^*. Ciò dimostra che anche la serie $g(z)$ è convergente. $\diamond$

Corollario 1.9.2 *Sia f una funzione analitica in un aperto $U \subset \mathbf{C}$ e sia $z_0 \in U$. Allora f è un isomorfismo analitico locale in z_0 se e solo se $f'(z_0) \neq 0$.*

Dim. La condizione $f'(z_0) \neq 0$ è necessaria affinché f sia un isomorfismo analitico locale in z_0. Se infatti esiste una funzione $g(z)$ analitica in un aperto V_0 e tale che $g(f(z)) = z$ per ogni z in un intorno U_0 di z_0, allora, essendo $z' = 1$, per ogni $z \in U_0$ si ha

$$1 = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

e in particolare $f'(z_0) \neq 0$.

Dimostriamo che la condizione è anche sufficiente. Supponiamo dapprima che $z_0 = 0$ e $f(0) = 0$. Quindi f è analitica in un intorno di 0 e $o_0(f) = 1$, e ciò significa che f può essere rappresentata come somma di una serie di potenze convergente in 0 e di ordine 1. Possiamo pensare f come definita nel suo disco aperto di convergenza $f : D \to \mathbf{C}$. Sia g l'inversa formale di f e sia V_0 un disco aperto centrato in 0 e contenuto nel disco di convergenza di g e tale che $g(V_0) \subset D$; V_0 esiste perché g è continua. Sia $U_0 = f^{-1}(V_0)$, e sia

$$f_0 : U_0 \to V_0$$

la restrizione di f a U_0. Si osservi che $g(V_0) \subset U_0$ perché per ogni $w \in V_0$ si ha $f(g(w)) = w$. Pertanto la restrizione g_0 di g a V_0 definisce un'applicazione analitica $g_0 : V_0 \to U_0$ tale che $f_0(g_0(w)) = w$ per ogni $w \in V_0$. D'altra parte per come è stata definita f_0 si ha anche $g_0(f_0(z)) = z$ per ogni $z \in U_0$, e quindi f_0 e g_0 sono isomorfismi analitici inversi uno dell'altro; ciò conclude la dimostrazione nel caso $z_0 = 0$ e $f(z_0) = 0$.

Il caso generale si riduce a quello precedente per traslazione. Precisamente, per una f arbitraria tale che $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z - z_0)^k$, si ponga $w = z - z_0$, e

$$F(w) = f(w + z_0) - f(z_0) = \sum_{k\geq 1} a_k w^k$$

Pertanto:

$$f(z) = F(z - z_0) + f(z_0)$$

Allora per quanto dimostrato nella prima parte F possiede un'inversa locale G. Poniamo $w_0 = f(z_0)$, e sia

$$g(w) = G(w - w_0) + z_0$$

Allora g è un'inversa locale per f. Infatti:

$$f(g(w)) = F(g(w) - z_0) + f(z_0) = F(G(w - w_0) + z_0 - z_0) + f(z_0) =$$

$$= w - w_0 + f(z_0) = w$$

e viceversa:

$$g(f(z)) = G(f(z)-w_0)+z_0 = G(F(z-z_0)+f(z_0)-w_0)+z_0 = z-z_0+z_0 = z$$

e ciò conclude la dimostrazione. ◇

Esempio 1.9.3 Dal Corollario 1.9.2 segue che la funzione esponenziale è un isomorfismo analitico locale, essendo $(e^z)' = e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbf{C}$. Pertanto ogni $w_0 \neq 0$ possiede un intorno aperto su cui è definita una determinazione analitica di $\log(w)$ avente come valore in w_0 una qualsiasi preassegnata determinazione di $\log(w_0)$. Ciò implica facilmente che $e^{(\cdot)} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ è un rivestimento, ed è il rivestimento universale di $\mathbf{C}^*$.

A titolo di esempio calcoliamo nell'intorno del punto $w_0 = 1$ la determinazione di $\log(w)$ tale che $\log(1) = 0$. Con le notazioni del Corollario 1.9.2 abbiamo $z_0 = 0$ e:

$$F(w) = f(w+0) - f(0) = e^w - 1 = \sum_{k\geq 1} \frac{w^k}{k!}$$

e $e^w = F(w) + 1$, mentre

$$\log(w) = g(w) = G(w - w_0) + z_0 = G(w-1)$$

Non ci resta che calcolare $G(w)$, l'inversa formale di $F(w)$. Questo calcolo è facilitato dall'osservare che $G(w) = g(w+1)$ e che $w = f(g(w))$. Derivando si ottiene

$$1 = f'(g(w))g'(w) = e^{\log(w)}g'(w) = wg'(w)$$

Quindi

$$G'(w) = g'(w+1) = \frac{1}{w+1} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k w^k$$

Ma allora $G(w)$ si ottiene integrando termine a termine e scegliendo 0 come termine costante, cioè:

$$G(w) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{w^k}{k}$$

e quindi:

$$\log(w) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{(w-1)^k}{k}$$

Esempio 1.9.4 La funzione $f(z) = 1/z$ è analitica in $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ ma non possiede una primitiva in $\mathbf{C}^*$. Sia infatti $g(z)$ una sua primitiva locale definita in un intorno $D \subset \mathbf{C}^*$ di un punto $z_0 \in \mathbf{C}^*$; si abbia cioè $g'(z) = 1/z$ per $z \in D$. Se D è sufficientemente piccolo è anche ben definita in D una determinazione analitica $\ell(z)$ del logaritmo di z, cioè si ha:

$$z = e^{\ell(z)}, \qquad z \in D$$

Segue che

$$1 = e^{\ell(z)}\ell'(z) = z\ell'(z) \qquad z \in D$$

e quindi anche $\ell(z)$ è una primitiva di $1/z$ in D. Pertanto esiste una costante $c \in \mathbf{C}$ tale che $g(z) = \ell(z) + c$. Dunque, se esistesse una primitiva $g(z)$ di $f(z)$ *in tutto* $\mathbf{C}^*$ allora esisterebbe una costante C tale che $g(z) + C$ sia una determinazione del logaritmo di z *analitica in tutto* $\mathbf{C}^*$: ciò è palesemente impossibile, perché non può nemmeno esisterne una continua. Per convincersene è sufficiente considerare la variazione continua di una qualsiasi determinazione di $\log(z)$ quando z percorre la circonferenza unitaria.

Il risultato che segue descrive una proprietà geometrica fondamentale delle funzioni analitiche.

Teorema 1.9.5 (dell'applicazione aperta) *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso e $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione analitica. Se f non è costante allora f è un'applicazione aperta.*

Dim. Poiché f non è costante la sua derivata $f'(z)$ si annulla al più su un sottoinsieme discreto $S \subset U$. Per il Corollario 1.9.2, la restrizione di f ad $U\backslash S$ è un isomorfismo analitico locale e quindi è aperta. Ci resta da verificare che f è aperta anche nei punti di S.

Sia $a \in S$; non è restrittivo supporre che $f(a) = 0$. Allora $r := o_a(f) \geq 2$. Si ha pertanto:

$$f(z) = \sum_{k \geq r} a_k(z-a)^k, \qquad a_r \neq 0$$

in un disco aperto D centrato in a. Si ha:

$$a_r^{-1} \sum_{k \geq 0} a_{r+k}(z-a)^k = 1 + h(z)$$

dove $h(z)$ è analitica in D e soddisfa $h(a) = 0$, cioè $o_a(h) \geq 1$. Sia $b \in \mathbf{C}$ tale che $b^r = a_r$. Allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^r \textstyle\sum_{k\geq 0} a_{r+k}(z-a)^k \\ &= a_r(z-a)^r(1+h(z)) \\ &= [b(z-a)]^r(1+h(z)) \end{aligned}$$

Poiché $o_a(h) \geq 1$ la serie composta $B_{1/r}(h(z))$ è ben definita e ha raggio di convergenza positivo; la funzione somma della serie soddisfa $B_{1/r}(h(z))^r = 1 + h(z)$. Pertanto possiamo riscrivere la funzione $f(z)$ nella forma seguente:

$$f(z) = [b(z-a)B_{1/r}(h(z))]^r$$

Quest'uguaglianza esprime la funzione $f(z)$ come la composizione della funzione

$$z \mapsto b(z-a)B_{1/r}(h(z))$$

con la funzione $w \mapsto w^r$. Si osservi che $B_{1/r}(h(a))^r = 1$ e quindi $B_{1/r}(h(a)) \neq 0$. Pertanto

$$o_a[b(z-a)B_{1/r}(h(z))] = o_a(b(z-a)) + o_a[B_{1/r}(h(z))] = 1 + 0 = 1$$

e quindi $b(z-a)B_{1/r}(h(z))$ è un isomorfismo analitico locale in a, in particolare è aperta in a. Inoltre è elementare verificare che la funzione $w \mapsto w^r$ è aperta. In conclusione $f(z)$ è aperta in a. $\diamond$

Osservazione 1.9.6 Dalla dimostrazione del teorema 1.9.5 segue che nell'intorno di un punto $a \in U$ in cui $f'(a) = 0$ l'applicazione f è la composizione di un isomorfismo analitico locale con l'applicazione $w \mapsto w^r$, dove $r = o_a(f - f(a))$.

Concludiamo questo paragrafo con un teorema che fornisce un criterio affinché una funzione analitica sia un isomorfismo analitico.

Teorema 1.9.7 *Sia f analitica su un insieme aperto $U \subset \mathbf{C}$, e supponiamo che f sia iniettiva. Allora f è un isomorfismo analitico. In particolare $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$.*

Proof. Poiché è iniettiva, f è non costante su ogni componente connessa di U. Quindi la sua immagine $V = f(U)$ è aperta. Denotiamo con $g : V \to U$ la sua inversa. Sia $a \in U$. In un intorno di a la funzione f ha uno sviluppo in serie della forma:

$$f(z) = f(a) + \sum_{k \geq r} a_k (z-a)^k, \qquad a_r \neq 0$$

Poiché f è iniettiva, dev'essere necessariamente $r = 1$ per l'osservazione 1.9.6, perché l'applicazione $w \mapsto w^r$ è iniettiva se e solo se $r = 1$. Quindi $f'(a) \neq 0$ e dal Corollario 1.9.2 segue che g è analitica in $f(a)$. $\diamond$

1.10 Il principio del massimo modulo

Come applicazione del teorema dell'applicazione aperta abbiamo il seguente importante risultato.

Teorema 1.10.1 (Principio del massimo modulo) *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso e $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione analitica. Se esiste un punto $z_0 \in U$ tale che la funzione $|f| : U \to \mathbf{R}$ abbia un massimo locale in z_0 allora f è costante.*

Dim. Sia

$$f(z) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k (z - z_0)^k$$

lo sviluppo in serie di $f(z)$ in z_0. Se f non è costante allora è aperta in z_0 e quindi la sua immagine contiene un disco di centro $a_0 = f(z_0)$. Quindi, al variare di z in un intorno di z_0, l'insieme di numeri reali $|f(z)|$ contiene un intervallo aperto contenente $|a_0| = |f(z_0)|$, e quindi $|f(z_0)|$ non può essere un massimo locale per $|f|$. $\diamond$

Il principio del massimo modulo si applica soprattutto nel caso in cui f sia una funzione definita in un disco chiuso, olomorfa al suo interno e continua sulla frontiera. In tal caso il teorema 1.10.1 implica che il massimo di $|f|$ sulla frontiera del disco è un limite superiore per $|f|$ anche nell'interno del disco.

Corollario 1.10.2 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso e $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione analitica. Se esiste un punto $z_0 \in U$ tale che la funzione $\Re(f)$ abbia un massimo locale in z_0, allora f è costante.*

Dim. La funzione $e^{f(z)}$ è analitica in U e soddisfa

$$|e^{f(z)}| = e^{\Re(f(z))}$$

Pertanto se z_0 è un massimo locale per $\Re(f)$, è anche un massimo locale per $|e^{f(z)}|$ e quindi $e^{f(z)}$ è costante, per il Teorema 1.10.1. Da ciò segue che $f(z)$ è costante. $\diamond$

Diamo una importante applicazione del Teorema 1.10.1:

Teorema 1.10.3 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Sia*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$$

un polinomio non costante a coefficienti complessi. Allora f possiede almeno una radice, cioè esiste z_0 tale che $f(z_0) = 0$.

Dim. Possiamo supporre $a_d \neq 0$. Per assurdo supponiamo che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbf{C}$. Scriviamo:

$$f(z) = a_d z^d \left(\frac{a_0}{a_d z^d} + \frac{a_1 z}{a_d z^d} + \cdots + 1 \right)$$

Da questa espressione deduciamo che

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Pertanto, fissato $c \in \mathbf{C}$, esiste un numero reale $R > 0$ tale che

$$\frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{|f(c)|} \tag{1.14}$$

per ogni z tale $|z| \geq R$. Non è restrittivo supporre che si abbia anche $|c| < R$. Sia K il disco chiuso di centro 0 e raggio R. Poiché la funzione $\frac{1}{|f(z)|}$ è continua in K, che è chiuso e limitato, essa possiede un massimo in un punto $w \in K$. Per la (1.14) il punto w non può essere sulla frontiera di K. Quindi w è interno a K. Dal principio del massimo modulo si deduce che $\frac{1}{f(z)}$ è costante, e quindi che $f(z)$ è costante, una contraddizione. $\diamond$

Un'altra applicazione del Teorema 1.10.1 è la seguente.

Teorema 1.10.4 (Lemma di Schwarz) *Sia* $D = D(0,1)$ *il disco aperto unitario,* $f : D \to D$ *una funzione analitica tale che* $f(0) = 0$*. Allora*

$$|f(z)| \leq |z|$$

per ogni $z \in D$*.*

Dim. Poiché $f(0) = 0$ la funzione $g(z) = f(z)/z$ è analitica in D. Fissato $0 \neq z \in D$, e posto $r = |z|$, si ha

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

e quindi, per il principio del massimo modulo, si ha anche $|g(\zeta)| \leq 1/r$ se $|\zeta| \leq r$ perché altrimenti $|g(\zeta)$ avrebbe un massimo nell'interno del disco chiuso $|z| \leq r$. Facendo tendere $r = |z| \to 1$ si ottiene la tesi. $\diamond$

ESERCIZI

Capitolo 2

Integrazione complessa

2.1 Curve e archi

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbf{R}$. Una *curva differenziabile a valori complessi*, o semplicemente una *curva*, è un'applicazione

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$$

di classe C^1, cioè tale che, posto $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, le funzioni

$$\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$$

siano di classe C^1. I punti $\gamma(a), \gamma(b) \in \mathbf{C}$ si dicono gli *estremi*, e rispettivamente *punto iniziale* e *punto finale*, di γ; diremo che γ è un arco *congiungente* $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. Diremo che γ è una *curva chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$, cioè se il punto iniziale e il punto finale coincidono. Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto, diremo che γ *è contenuta in* U se la sua immagine è contenuta in U. Scriveremo anche $\gamma : [a, b] \to U$. Con abuso di linguaggio, chiameremo *punti di* γ i punti di $\gamma([a, b])$.

Se $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ è un'applicazione differenziabile tale che $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ e $\varphi'(t) > 0$ per ogni $t \in [c, d]$, la composizione

$$\gamma \circ \varphi : [c, d] \to \mathbf{C}$$

si dice una *riparametrizzazione* di γ.

Nel seguito considereremo anche applicazioni continue

$$F : [a, b] \to \mathbf{C}$$

non necessariamente differenziabili. Una funzione F siffatta verrà talvolta chiamata una *curva continua.* La definizione di riparametrizzazione si estende senza cambiamenti alle curve continue.

Lemma 2.1.1 *Se $F : [a,b] \to \mathbf{C}$ è una curva (o una curva continua), per ogni intervallo chiuso e limitato $[c,d]$ esiste una riparametrizzazione di F definita in $[c,d]$.*

Dim. È sufficiente osservare che $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ definita da:

$$\varphi(t) = \frac{b-a}{d-c}\, t + \frac{ad-bc}{d-c}$$

definisce la riparametrizzazione. $\diamond$

La *derivata* di una curva γ in $t \in [a,b]$ è $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$. La *velocità* di γ in t è $|\gamma'(t)|$.

L'opposta di una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ è la curva

$$\gamma^- : [a,b] \to \mathbf{C}$$

definita da

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$$

Gli estremi di γ^- coincidono con gli estremi di γ, ma il punto iniziale a finale sono scambiati tra loro.

Un *arco*, o *cammino*, è una successione finita

$$\gamma = \{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}\}$$

di curve tale che il punto finale di $\gamma^{(i)}$ coincida con il punto iniziale di $\gamma^{(i+1)}$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$. Il punto iniziale di $\gamma^{(1)}$ è detto *punto iniziale* di γ, mentre il punto finale di $\gamma^{(n)}$ è detto *punto finale* di γ. L'arco γ si dice *chiuso* se il punto iniziale e il punto finale coincidono.

L'arco *opposto* di $\gamma = \{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}\}$ è

$$\gamma^- = \{\gamma^{(n)-}, \dots, \gamma^{(1)-}\}$$

Se le curve $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ che compongono un dato arco γ sono definite negli intervalli $[b_1, c_1], \dots, [b_n, c_n]$ rispettivamente, allora possiamo assegnare a piacere un intervallo $[a,b]$ ed una sua partizione

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

e, utilizzando il Lemma 2.1.1, riparametrizzare $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}$ in modo che i nuovi intervalli di definizione siano $[a_0, a_1], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$. In tal modo γ sarà identificato ad una curva continua

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$$

di classe C^1 al di fuori eventualmente dei punti a_i. Viceversa, è ovvio che se si assegna una curva continua che sia di classe C^1 al di fuori di un numero finito di punti dell'intervallo di definizione, essa definisce un arco. Pertanto un arco può anche essere definito in questo modo. Nel seguito utilizzeremo indifferentemente una o l'altra delle due definizioni di arco.

Esempio 2.1.2 Se $z_0, z_1 \in \mathbf{C}$ sono due numeri complessi distinti, il *segmento* di estremi z_0, z_1 è la curva

$$[z_0, z_1] : [0, 1] \to \mathbf{C}$$

definita da $[z_0, z_1](t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$. Si noti che $[z_0, z_1]$ è ben definito anche se $z_0 = z_1$. Se $z_0, z_1, \ldots, z_n$ sono numeri complessi allora la *poligonale* di vertici $z_0, z_1, \ldots, z_n$ è l'arco

$$\{[z_0, z_1], \ldots, [z_{n-1}, z_n]\}$$

che si denoterà semplicemente con il simbolo $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$.

Se $z_0 \in \mathbf{C}$ e $R > 0$, la *circonferenza* di centro z_0 e raggio R è la curva

$$C_{R,z_0} : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$$

definita da

$$C_{R,z_0}(\theta) = z_0 + Re^{i\theta} = z_0 + R\cos(\theta) + iR\sin(\theta)$$

Se $z_0 = 0$ scriveremo anche C_R invece di $C_{R,0}$.

Per comodità del lettore richiamiamo il seguente risultato elementare:

Proposizione 2.1.3 *Sia $S \subset \mathbf{C}$ un sottoinsieme. L'applicazione*

$$\rho : \mathbf{C} \backslash S \to \mathbf{R}$$

definita da

$$\rho(z) = \inf\{|z - p| : p \in S\}$$

è continua. ρ è chiamata funzione distanza *da S.*

Dim. Sarà sufficiente dimostrare che, per ogni $z, w \in \mathbf{C} \backslash S$, si ha:

$$|\rho(z) - \rho(w)| \leq |z - w|$$

Dato $z \in \mathbf{C} \backslash S$ e $\epsilon > 0$, per definizione di ρ esiste $p \in S$ tale che $|z - p| \leq \rho(z) + \epsilon$. Quindi:

$$|w - p| \leq |w - z| + |z - p| \leq |w - z| + \rho(z) + \epsilon$$

e quindi

$$\rho(w) \leq |w - p| \leq |w - z| + \rho(z) + \epsilon$$

cioè $\rho(w) - \rho(z) \leq |w - z| + \epsilon$. Poiché ϵ è arbitrariamente piccolo, ciò implica la disuguaglianza da dimostrare. $\diamond$

Nel seguito utilizzeremo il seguente lemma.

Lemma 2.1.4 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $F : [a, b] \to U$ una curva continua. Allora esiste una suddivisione*

$$a = a_0 < \cdots < a_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ ed una successione finita di dischi aperti $\{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ contenuti in U e tali che

$$F([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i, \qquad i = 0, \ldots, n - 1$$

Dim. Poniamo $\phi(t) = \rho(F(t))$, dove ρ è la funzione distanza da $\mathbf{C} \backslash U$. Per la Proposizione 2.1.3 la funzione

$$\phi : [a, b] \to \mathbf{R}$$

definita da $\phi(t) = \rho(F(t))$, è continua, e quindi ammette minimo perché $[a, b]$ è compatto. Sia

$$r := \min_{[a,b]} \{\phi(t)\}$$

Essendo U aperto, $r > 0$. Poiché F è uniformemente continua, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $t, s \in [a, b]$ tali che $|s - t| < \delta$, si abbia

$$|F(s) - F(t)| < \frac{r}{2}$$

Consideriamo una partizione $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ di $[a, b]$ tale $a_{i+1} - a_i < \delta$ per ogni $i = 0, \ldots, n - 1$, e sia D_i il disco aperto di centro $F(a_i)$ e raggio r. Allora dalla costruzione segue che la partizione scelta e $\{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ hanno le proprietà richieste. $\diamond$

Introduciamo la seguente definizione.

Definizione 2.1.5 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Due archi $\gamma, \eta : [a,b] \to U$ si diranno* vicini *se esiste una partizione*

$$a = a_0 < \cdots < a_n = b$$

dell'intervallo $[a,b]$ ed una successione finita di dischi aperti $\{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ contenuti in U tali che

$$\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i \ \textit{e} \ \eta([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i$$

per $i = 0, \ldots, n-1$.

Nel calcolare un integrale complesso risulta spesso utile sostituire un arco di integrazione con un altro ad esso vicino. Tale sostituzione può talvolta venire iterata, mediante un procedimento di deformazione continua dell'arco, che viene chiamato "omotopia".

Definizione 2.1.6 *Siano F, G due curve continue definite sullo stesso intervallo $[a,b]$ e contenute in un aperto $U \subset \mathbf{C}$. Una* omotopia *tra F e G è un'applicazione continua:*

$$\psi : [a,b] \times [c,d] \to U$$

per qualche intervallo $[c,d]$, tale che

$$\psi(t,c) = F(t), \qquad \psi(t,d) = G(t)$$

per ogni $t \in [a,b]$. Se F e G hanno stesso punto iniziale z_0 e stesso punto finale z_1, diremo che ψ lascia fissi gli estremi *se inoltre si ha:*

$$\psi(a,s) = z_0, \qquad \psi(b,s) = z_1$$

per ogni $s \in [c,d]$.

Dalla definizione segue che se ψ è un'omotopia tra F e G allora per ogni $s \in [c,d]$

$$\psi_s : [a,b] \to U$$

definita da $\psi_s(t) = \psi(t,s)$, è una curva continua e $\psi_c = F$, $\psi_d = G$. Quindi un'omotopia definisce una famiglia di curve continue che realizzano una deformazione continua di F in G. Se F e G hanno gli stessi estremi, le diremo *omotope* se esiste un'omotopia tra F e G che lascia fissi gli estremi. Se F e G sono curve continue chiuse, le diremo *omotope* se esiste un'omotopia ψ tra F e G tale che ψ_s sia una curva continua chiusa per ogni $s \in [c,d]$.

Esempio 2.1.7 Un sottoinsieme $S \subset \mathbf{C}$ si dice *convesso* se, per ogni $z_0, z_1 \in S$, il segmento $[z_0, z_1]$ è contenuto in S. È facile verificare che un insieme convesso è connesso. Ovviamente $\mathbf{C}$ è convesso.

Due qualsiasi curve continue $\gamma, \eta : [a, b] \to U$ contenute in un aperto convesso U sono omotope. Infatti ponendo:

$$\psi(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s\eta(t)$$

si definisce un'omotopia $\psi : [a, b] \times [0, 1] \to U$ tra γ e η. Se γ e η hanno gli stessi estremi allora ψ fissa gli estremi; Se γ e η sono chiuse anche ψ_s è chiusa per ogni $s \in [0, 1]$.

Esempio 2.1.8 Un sottoinsieme $S \subset \mathbf{C}$ si dice *convesso rispetto ad un suo punto* $w \in S$ se per ogni $z \in S$ il segmento $[z, w]$ è contenuto in S.

Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto convesso rispetto ad un suo punto w allora due qualsiasi curve continue $\gamma, \eta : [a, b] \to U$ sono omotope. Un'omotopia è data da:

$$\psi(t, s) = \begin{cases} (1 - 2s)\gamma(t) + 2sw & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - s)w + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)\eta(t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Se γ e η hanno gli stessi estremi allora ψ fissa gli estremi; Se γ e η sono chiuse anche ψ_s è chiusa per ogni $s \in [0, 1]$.

Esempio 2.1.9 Sia $w \in \mathbf{C}$, $\gamma(t) = w + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, la circonferenza di centro w e raggio $R > 0$. Sia z_0 un punto interno alla circonferenza, ed $r > 0$ tale che $|z_0 - w| + r < R$. Sia $\eta(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, la circonferenza di centro z_0 e raggio r. Allora γ ed η sono omotope.

Un'omotopia è data da:

$$\psi(t, s) = s\left[z_0 + r\frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|}\right] + (1 - s)\gamma(t)$$

Attraverso un'omotopia è possibile costruire successioni di archi vicini, utilizzando il seguente lemma:

Lemma 2.1.10 *Sia $\psi : [a, b] \times [c, d] \to U$ un'omotopia tra due curve continue F, G. Allora esistono partizioni*

$$a = a_0 < \cdots < a_n = b, \qquad c = c_0 < \cdots < c_m = d$$

tali che per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, $j = 0, \ldots, m-1$, *posto*

$$R_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$$

l'immagine $\psi(R_{ij})$ *sia contenuta in un disco aperto* D_{ij} *contenuto in* U. *In particolare, se* $s, s' \in [c_j, c_{j+1}]$ *per qualche* j, *allora gli archi* ψ_s *e* $\psi_{s'}$ *sono vicini.*

Dim. L'ultima affermazione è un'immediata conseguenza della prima. Dimostriamo la prima asserzione. Sia ρ la funzione distanza da $\mathbf{C} \backslash U$. Ponendo $\phi(t, s) = \rho(\psi(t, s))$ otteniamo un'applicazione

$$\phi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$$

che è continua per la Proposizione 2.1.3. Per la compattezza essa ammette un minimo r, che è positivo perché U è aperto. D'altra parte, la compattezza implica che ψ è uniformemente continua. Pertanto esiste $\delta > 0$ tale che $|\psi(t, s) - \psi(t', s')| < r/2$ se $|t - t'| < \delta$ e $|s - s'| < \delta$. suddividiamo gli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$ in sottointervalli di diametro minore di δ:

$$a = a_0 < \cdots < a_n = b, \qquad c = c_0 < \cdots < c_m = d$$

Per costruzione, per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, $j = 0, \ldots, m-1$, il disco D_{ij} di centro $\psi(a_i.c_j)$ e raggio r è contenuto in U e contiene $\psi(R_{ij})$. ◇

Introduciamo una importante classe di insiemi aperti.

Definizione 2.1.11 *Un aperto* $U \subset \mathbf{C}$ *si dice* semplicemente connesso *se è connesso e se ogni curva continua chiusa contenuta in* U *è omotopa ad una curva costante.*

Esempio 2.1.12 Segue dagli esempi 2.1.7 e 2.1.8 che sono semplicemente connessi gli aperti convessi e, più in generale, gli aperti convessi rispetto ad un loro punto. In particolare sono semplicemente connessi:

(i) un disco aperto;

(ii) un semipiano aperto;

(iii) il complementare di una semiretta chiusa.

2.2 Integrazione lungo archi

Siano $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, e sia $F : [a, b] \to \mathbf{C}$ una curva continua data da:

$$F(t) = u(t) + iv(t)$$

Definiamo *l'integrale indefinito* di F come

$$\int F(t)dt = \int u(t)dt + i \int v(t)dt$$

e definiamo *l'integrale (definito) di F su* $[a, b]$ come:

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

In altre parole la definizione di integrale (definito o indefinito) è data applicando alle funzioni $u(t)$ e $v(t)$ le corrispondenti definizioni dell'analisi di variabile reale. Pertanto dal teorema fondamentale del calcolo discende che la funzione

$$t \mapsto \int_a^t F(s)ds$$

è differenziabile, e che la sua derivata è la funzione $F(t)$.

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ è una curva, definiamo la *lunghezza* di γ come

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

cioè come l'integrale della sua velocità.

Se $f : U \to \mathbf{C}$ è una funzione continua su un aperto $U \subset \mathbf{C}$ e se $\gamma : [a, b] \to U$ è una curva, definiamo *l'integrale di f esteso a γ* come

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Se $\gamma = \{\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}\}$ è un arco in U allora *l'integrale di f esteso a γ* è definito come:

$$\int_\gamma f := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma^{(i)}} f$$

Lemma 2.2.1

(i) *Se* $F : [a, b] \to \mathbf{C}$ *è una funzione continua allora*

$$\left| \int_a^b F(t)dt \right| \leq \int_a^b |F(t)|\, dt$$

(ii) *Se* $f : U \to \mathbf{C}$ *è una funzione continua su un aperto* $U \subset \mathbf{C}$*,* $\gamma : [a, b] \to U$ *è una curva, e* $\eta : [c, d] \to U$ *una sua riparametrizzazione, allora:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz$$

(iii) *Se* f *e* γ *sono come in (ii), allora:*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq ||f||_\gamma L(\gamma)$$

dove

$$||f||_\gamma := \max_{t \in [a,b]} \{|f(\gamma(t))|\}$$

(iv) *Se* f *e* γ *sono come in (ii), allora*

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

Dim. (i) Per ogni partizione $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ di $[a, b]$ abbiamo la disuguaglianza

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} F(a_k)(a_{k+1} - a_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |F(a_k)|(a_{k+1} - a_k)$$

Passando al limite la disuguaglianza si conserva e si ottiene la conclusione.

(ii) Supponiamo che la riparametrizzazione sia della forma $\eta(t) = \gamma(\varphi(t))$ dove

$$\varphi : [c, d] \to [a, b]$$

Allora:

$$\begin{aligned}\int_\eta f(z)dz &= \int_c^d f(\eta(t))\eta'(t)dt \\ &= \int_c^d f(\eta(t))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\ &= \int_\gamma f(z)dz\end{aligned}$$

(iii) Segue dalla (i) e dalla disuguaglianza

$$\int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \leq ||f||_\gamma \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

(iv) è lasciata come esercizio. $\diamond$

Avremo anche bisogno del seguente lemma:

Lemma 2.2.2 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue su un aperto $U \subset \mathbf{C}$, che converge uniformemente ad una funzione f. Sia γ un arco in U. Allora*

$$\lim_n \int_\gamma f_n = \int_\gamma f$$

Se $\sum_n f_n$ è una serie di funzioni continue in U che converge uniformemente in U, allora

$$\int_\gamma \sum_n f_n = \sum_n \int_\gamma f_n$$

Dim. La prima affermazione segue immediatamente dalla disuguaglianza:

$$\left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| \leq \int_\gamma |f_n - f| \leq \sup_\gamma\{|f_n - f|\} L(\gamma)$$

La seconda asserzione segue dalla prima applicata alla successione delle somme parziali della serie. $\diamond$

Esempio 2.2.3 Sia $f(z) = 1/z$. Allora, per ogni $R > 0$ si ha:

$$\int_{C_R} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Sia ora $f(z) = \bar{z}$. Allora:

$$\int_{C_R} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} Re^{-i\theta} Rie^{i\theta} d\theta = R^2 i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i R^2$$

Ricordiamo che, se $f : U \to \mathbf{C}$ è una funzione continua definita su un aperto $U \subset \mathbf{C}$, una *primitiva* per f è una funzione olomorfa $g : U \to \mathbf{C}$ tale che $g'(z) = f(z)$ in U.

Teorema 2.2.4 *Sia $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione continua definita su un aperto $U \subset \mathbf{C}$.*

(i) *Se f ha una primitiva g in U allora, per ogni $z_0, z_1 \in U$ e per ogni arco γ in U congiungente z_0 a z_1 si ha*

$$\int_\gamma f(z) dz = g(z_1) - g(z_0)$$

In particolare quest'integrale non dipende dal particolare arco congiungente z_0 a z_1 utilizzato per calcolarlo.

(ii) *Se U è connesso vale anche il viceversa. Cioè, se per ogni $z_0, z_1 \in U$ l'integrale*

$$\int_\gamma f(z) dz$$

ha lo stesso valore qualsiasi sia l'arco γ contenuto in U congiungente z_0 a z_1, allora f possiede una primitiva in U.

Dim. (i) Supponiamo dapprima che γ sia una curva. Allora si ha:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) dz &= \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) dt \\ &= g(\gamma(t))\Big|_a^b \\ &= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Se $\gamma = \{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}\}$ è un arco in U tale che gli estremi di $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ siano rispettivamente $\{z_0, w_1\}, \dots, \{w_{i-1}, w_i\}, \dots, \{w_{n-1}, z_1\}$ allora si ha, per la prima parte della dimostrazione:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma^{(i)}} f(z)dz \\ &= (g(w_1) - g(z_0)) + (g(w_2) - g(w_1)) + \dots + (g(z_1) - g(w_{n-1})) \\ &= g(z_1) - g(z_0)\end{aligned}$$

(ii) Fissiamo un punto $z_0 \in U$ e definiamo:

$$g(z) := \int_\gamma f(\zeta)d\zeta$$

dove γ è un qualsiasi arco in U congiungente z_0 a z. Per ipotesi quest'integrale è indipendente da γ e pertanto può essere denotato

$$\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$$

Poiché U è connesso $g(z)$ è ben definita per ogni $z \in U$. Per ogni $z \in U$ e per ogni $h \in \mathbf{C}$ tale che $z + h \in U$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{g(z+h)-g(z)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta + \int_{z}^{z_0} f(\zeta)d\zeta\right] \qquad (2.1) \\ &= \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta\end{aligned}$$

Poiché U è aperto, quando $|h|$ è sufficientemente piccolo il segmento congiungente z a $z + h$ è contenuto in U e quindi l'ultimo integrale in (3.13) può essere calcolato su tale segmento. Scriviamo:

$$f(\zeta) = f(z) + \varphi(\zeta)$$

dove φ è una funzione continua su U tale che $\lim_{\zeta \to z} \varphi(\zeta) = 0$. Allora si ha:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta &= \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(z)d\zeta + \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} \varphi(\zeta)d\zeta \\ &= f(z) + \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} \varphi(\zeta)d\zeta\end{aligned}$$

Sostituendo in(3.13) otteniamo:

$$\left|\frac{g(z+h)-g(z)}{h}-f(z)\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]}\varphi(\zeta)d\zeta\right| \leq \frac{1}{|h|}|h|\max\{|\varphi(\zeta)|\}$$

dove il max è calcolato sul segmento $[z, z+h]$. Poiché

$$\lim_{h\to 0}\max\{|\varphi(\zeta)|\} = 0$$

la conclusione segue. $\diamond$

È immediato verificare che il Teorema 2.2.4 è equivalente al seguente:

Teorema 2.2.5 *Sia $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione continua definita su un aperto $U \subset \mathbf{C}$.*

(i) *Se f ha una primitiva in U allora per ogni arco chiuso γ contenuto in U si ha*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

(ii) *Se U è connesso e se per ogni arco chiuso γ contenuto in U si ha*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

allora f possiede una primitiva in U.

Esempio 2.2.6 Per ogni $n \geq 0$ la funzione z^n possiede la primitiva $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ in $\mathbf{C}$. Se $n \leq -2$ la funzione z^n possiede la primitiva $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ in $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Pertanto si ha

$$\int_\gamma z^n dz = 0 \begin{cases} \text{per ogni } \gamma \text{ chiuso se } n \geq 0 \\ \text{per ogni } \gamma \text{ chiuso non contenente 0 se } n \leq -2 \end{cases}$$

In particolare deduciamo che, se $P(z)$ è un polinomio, allora

$$\int_\gamma P(z)dz = 0$$

per ogni arco chiuso γ in $\mathbf{C}$.

D'altra parte, dall'esempio (2.2.3) e dal Teorema 2.2.5 segue che la funzione z^{-1} non possiede una primitiva in $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

Esempio 2.2.7 Se $\sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ è una serie di potenze convergente in un disco D di centro a, allora la sua somma è una funzione analitica $f(z)$ che possiede primitiva in D, data dalla somma della serie $\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}$ (cfr. Proposizione 1.5.8). Segue dal Teorema 2.2.5 che $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni arco chiuso γ contenuto in D.

2.3 Il teorema di Goursat

Il teorema di Goursat, che dimostreremo in questo paragrafo, dà informazioni sull'integrazione di funzioni olomorfe in un caso molto particolare. Ciò nonostante esso è indispensabile per la dimostrazione del teorema di Cauchy, che daremo successivamente.

Teorema 2.3.1 *Sia R un rettangolo in $\mathbf{C}$ e sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un aperto contenente R. Allora*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

dove ∂R denota l'arco costituito dai quattro lati del perimetro di R percorso in verso antiorario.

Dim. Suddividiamo il rettangolo R in quattro rettangoli uguali, $R_1, \ldots, R_4$, bisecandone i lati. Otteniamo:

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f(z)dz$$

e pertanto

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{\partial R_i} f(z)dz\right|$$

Da questa disuguaglianza segue che per almeno uno dei quattro rettangoli $R_1, \ldots, R_4$, chiamiamolo $R^{(1)}$, si ha

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\partial R^{(1)}} f(z)dz\right|$$

Ora ragioniamo nello stesso modo sul rettangolo $R^{(1)}$, suddividendolo a sua volta in quattro rettangoli uguali. Deduciamo che per uno di essi, chiamiamolo $R^{(2)}$, si ha:

$$\left|\int_{\partial R^{(1)}} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\partial R^{(2)}} f(z)dz\right|$$

e quindi:

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \leq 4^2\left|\int_{\partial R^{(2)}} f(z)dz\right|$$

Procedendo in questo modo otteniamo una successione di rettangoli

$$R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset R^{(3)} \supset \dots$$

tali che:

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int_{\partial R^{(n)}} f(z)dz\right| \tag{2.2}$$

per ogni n.

Denotiamo con c_n il centro di $R^{(n)}$. La successione $\{c_n\}$ è di Cauchy. Infatti, dato $\epsilon > 0$, sia N tale che il diametro di $R^{(N)}$ sia minore di ϵ. Se $n, m \geq N$ allora c_n e c_m stanno in $R^{(N)}$ e quindi

$$|c_n - c_m| < \epsilon$$

Sia $z_0 = \lim_{n\to\infty} c_n$. Allora $z_0 \in R^{(n)}$ per ogni n perché $R^{(n)}$ è chiuso: ne segue che

$$z_0 \in \bigcap_n R^{(n)}$$

Ma poiché il diametro degli $R^{(n)}$ tende a 0 la loro intersezione non può contenere più di un punto. Quindi

$$\{z_0\} = \bigcap_n R^{(n)}$$

Consideriamo un disco V di centro z_0 tale che per ogni $z \in V$ si abbia:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)h(z)$$

dove $h(z)$ è una funzione continua in V e tale che $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$. Abbiamo , per tutti gli $n \gg 0$, $R^{(n)} \subset V$ e quindi:

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\partial R^{(n)}} f(z)dz = f(z_0) \int_{\partial R^{(n)}} dz + f'(z_0) \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0)dz \\ &+ \textstyle\int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0)h(z)dz\end{aligned}$$

Dall'esempio 2.2.6 segue che i primi due integrali a secondo membro sono nulli e quindi:

$$\int_{\partial R^{(n)}} f(z)dz = \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0)h(z)dz$$

Denotiamo con L_0 la lunghezza di ∂R, e con L_n quella di $\partial R^{(n)}$. Allora si ha $L_n = 2L_{n+1}$ cosicché per ogni n:

$$L_0 = 2^n L_n$$

Pertanto, tenuto conto di (2.2), abbiamo:

$$\begin{aligned}&\left|\textstyle\int_{\partial R} f(z)dz\right| \le 4^n \left|\textstyle\int_{\partial R^{(n)}} f(z)dz\right| \\ &\le 4^n \textstyle\int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0)h(z)dz \le 4^n \frac{1}{2^n} L_0 \max_{R^{(n)}}\{|z - z_0||h(z)|\} \\ &\le 2^n L_0 \operatorname{diam}(R^{(n)}) \max_{R^{(n)}}\{|h(z)|\}\end{aligned}$$

Ma poiché $\operatorname{diam}(R^{(n)}) = \frac{1}{2^n}\operatorname{diam}(R)$ otteniamo

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \le L_0 \operatorname{diam}(R) \max_{R^{(n)}}\{|h(z)|\}$$

Il secondo membro tende a 0 quando $n \to \infty$, e quindi il teorema è dimostrato. $\diamond$

Osservazione 2.3.2 Il teorema di Goursat sussiste anche se al posto di un rettangolo si considera un triangolo. La dimostrazione è molto simile.

Il teorema di Goursat ha la seguente notevole conseguenza:

Teorema 2.3.3 *Sia D un disco aperto e sia $f(z)$ olomorfa in D. Allora $f(z)$ ha una primitiva in D, e l'integrale di f su un qualsiasi arco chiuso contenuto in D è 0.*

Dim. Sia z_0 il centro di D. Definiamo

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

dove l'integrale è esteso ad una delle due poligonali congiungenti z_0 e z e costituita da due lati consecutivi del rettangolo di vertici opposti z_0 e z. Sia h tale che $z + h \in D$. Abbiamo:

$$g(z+h) - g(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

dove l'ultimo integrale è esteso alla poligonale costituita da due lati consecutivi del rettangolo di vertici opposti z e $z+h$, e l'ultima uguaglianza è vera per il teorema di Goursat. Poiché f è continua in z, possiamo scrivere

$$f(\zeta) = f(z) + \psi(\zeta)$$

in un intorno di z, dove $\psi(\zeta)$ è una funzione continua tale che $\lim_{\zeta \to z} \psi(\zeta) = 0$. Allora:

$$g(z+h) - g(z) = \int_{z}^{z+h} f(z)d\zeta + \int_{z}^{z+h} \psi(\zeta)d\zeta = hf(z) + \int_{z}^{z+h} \psi(\zeta)d\zeta$$

Se $h = h_1 + ih_2$ allora la lunghezza della poligonale congiungente z con $z+h$ a cui è esteso l'integrale precedente è uguale a $|h_1| + |h_2|$. Pertanto:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} \psi(\zeta)d\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|}(|h_1| + |h_2|) \max\{|\psi(\zeta)|\}$$

dove il max è calcolato sulla suddetta poligonale. Ma allora:

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z) \right| \leq \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|}(|h_1| + |h_2|) \max\{|\psi(\zeta)|\} = 0$$

Ciò dimostra che g è una primitiva per f. L'ultima affermazione segue dal Teorema 2.2.5. $\diamond$

2.4 Il teorema di Cauchy

In questo paragrafo cercheremo di capire fino a che punto l'integrale di una funzione olomorfa è indipendente dall'arco di integrazione. Iniziamo con qualche osservazione preparatoria.

Sia f una funzione olomorfa su un aperto $U \subset \mathbf{C}$, e sia $\gamma : [a,b] \to U$ un arco in U. Per il Lemma 2.1.4 esistono una suddivisione

$$a = a_0 < \cdots < a_n = b$$

dell'intervallo $[a,b]$ e dischi aperti $\{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ contenuti in U tali che $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n-1$. Per il teorema 2.3.3, per ogni $i = 0, \ldots, n-1$ possiamo trovare una funzione olomorfa $g_i : D_i \to \mathbf{C}$ che è una primitiva della restrizione di f a D_i. Denotiamo con

$$\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \to D_i$$

Allora si ha:

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} [g_i(\gamma(a_{i+1})) - g_i(\gamma(a_i))] \tag{2.3}$$

dove l'ultima uguaglianza è una conseguenza del Teorema 2.2.4.

Teorema 2.4.1 *Sia f una funzione olomorfa su un aperto $U \subset \mathbf{C}$. Siano γ, η due archi contenuti in U e vicini (secondo la Definizione 2.1.5) aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz$$

Dim. Sia $[a,b]$ l'intervallo di definizione dei due archi. Poiché γ e η sono vicini, esistono una partizione $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ e dischi aperti $D_0, \ldots, D_{n-1}$ contenuti in U e tali che

$$\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i \supset \eta([a_i, a_{i+1}])$$

Denotiamo con:

$$z_i := \gamma(a_i), \qquad w_i := \eta(a_i)$$

Sia $g_i : D_i \to \mathbf{C}$ una primitiva di f su D_i. Allora la (2.3) implica la seguente identità:

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_\eta f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1}[(g_i(z_{i+1}) - g_i(z_i)) - (g_i(w_{i+1}) - g_i(w_i))]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2}[(g_i(z_{i+1}) - g_{i+1}(z_{i+1})) - (g_i(w_{i+1}) - g_{i+1}(w_{i+1}))]$$

$$-g_0(z_0) + g_0(w_0) + g_{n-1}(z_n) - g_{n-1}(w_n)$$

Ora osserviamo che su $D_i \cap D_{i+1}$ sia g_{i+1} che g_i sono primitive di f, e quindi $g_i - g_{i+1}$ è costante su $D_i \cap D_{i+1}$ perché quest'aperto è connesso. Ne segue che

$$g_i(z_{i+1}) - g_{i+1}(z_{i+1}) = g_i(w_{i+1}) - g_{i+1}(w_{i+1})$$

e quindi otteniamo

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_\eta f(z)dz = -g_0(z_0) + g_0(w_0) + g_{n-1}(z_n) - g_{n-1}(w_n) \tag{2.4}$$

Ma γ ed η hanno gli stessi estremi, cioè $z_0 = w_0$ e $z_n = w_n$. Quindi

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_\eta f(z)dz = 0$$

$\diamond$

Il risultato analogo per gli archi chiusi è il seguente:

Teorema 2.4.2 *Sia f una funzione olomorfa su un aperto $U \subset \mathbf{C}$. Siano γ, η due archi chiusi contenuti in U e vicini (secondo la Definizione 2.1.5). Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz$$

Dim. La dimostrazione procede in modo del tutto simile a quella del Teorema 2.4.1, ma la conclusione è diversa. Infatti ora g_0 e g_{n-1} sono due primitive di f nell'aperto connesso $D_0 \cap D_{n-1}$ e quindi $g_0 - g_{n-1}$ è costante su $D_0 \cap D_{n-1}$. Ma allora, poiché $z_0 = z_n$ e $w_0 = w_n$ il secondo membro della (2.4) si annulla. $\diamond$

Una ovvia generalizzazione è la seguente.

Corollario 2.4.3 *Sia f una funzione olomorfa su un aperto $U \subset \mathbf{C}$. Siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ archi contenuti in U aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Supponiamo che per ogni $j = 1, \ldots, m-1$ gli archi γ_j e γ_{j+1} siano vicini. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_m} f(z)dz$$

La stessa conclusione vale se si suppone che gli m archi $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, anziché avere gli stessi estremi, siano chiusi.

Ora possiamo dimostrare il risultato più importante di questo capitolo.

Teorema 2.4.4 (Cauchy) *Sia f una funzione olomorfa in un aperto $U \subset \mathbf{C}$, e siano*

$$\gamma, \eta : [a, b] \to U$$

due archi aventi stessi estremi. Se γ e η sono omotopi, si ha:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\eta} f(z)dz$$

La stessa conclusione vale se γ e η sono due archi chiusi omotopi.

Dim. Dimostriamo il teorema nel caso di archi aventi stessi estremi. Il caso degli archi chiusi è simile e viene lasciato al lettore.

Possiamo supporre che γ e η siano definite sullo stesso intervallo $[a, b]$; siano z_0 e z_1 i loro punti iniziale e finale. Sia

$$\psi : [a, b] \times [c, d] \to U$$

un'omotopia tra γ e η che fissa z_0 e z_1. Siano

$$a = a_0 < \cdots < a_n = b, \qquad c = c_0 < \cdots < c_m = d$$

partizioni tali che esistano dischi aperti $D_{ij} \subset U$ per cui si abbia $\psi(R_{ij}) \subset D_{ij}$, dove

$$R_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}], \qquad i = 0, \ldots, n-1;\ j = 0, \ldots, m-1$$

(cfr. Lemma 2.1.10). Dal Lemma 2.1.10 segue che per ogni $j = 0, \ldots, m-1$, le curve continue ψ_{c_j} e $\psi_{c_{j+1}}$ sono vicine. Se si suppone che tali curve siano degli archi (cioè siano quasi ovunque di classe C^1), allora il teorema segue dal Corollario 2.4.3.

Nel caso in cui tale ulteriore condizione non sia soddisfatta procediamo nel seguente modo. Poniamo

$$z_{ij} := \psi(a_i, c_j)$$

Sia g_{ij} una primitiva di f nel disco D_{ij}, e poniamo:

$$S_j = \sum_{i=0}^{n-1} [g_{ij}(z_{i+1j}) - g_{ij}(z_{ij})]$$

Poiché $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_{i0}$ e $\eta([a_i, a_{i+1}]) \subset D_{im-1}$ per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, per la (2.3) abbiamo:

$$S_0 = \int_\gamma f(z)dz, \qquad S_{m-1} = \int_\eta f(z)dz$$

Pertanto sarà sufficiente dimostrare che $S_j = S_{j+1}$ per ogni $j = 0, \ldots, m-2$. Osserviamo che $D_{ij} \cap D_{ij+1}$ è connesso per ogni $i = 0, \ldots, n-1$; pertanto esistono costanti κ_{ij} tali che:

$$g_{ij+1} = g_{ij} + \kappa_{ij}$$

e quindi possiamo riscrivere:

$$g_{ij+1}(z_{i+1j+1}) - g_{ij+1}(z_{ij+1}) = g_{ij}(z_{i+1j+1}) - g_{ij}(z_{ij+1})$$

Pertanto abbiamo:

$$S_j - S_{j+1} =$$

$$= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} [(g_{ij}(z_{i+1j}) - g_{ij}(z_{ij})) - (g_{ij}(z_{i+1j+1}) - g_{ij}(z_{ij+1}))]$$

$$= \textstyle\sum_{i=0}^{n-2} [(g_{ij}(z_{i+1j}) - g_{i+1j}(z_{i+1j})) - (g_{ij}(z_{i+1j+1}) - g_{i+1j}(z_{i+1j+1}))]$$

$$+(-g_{0j}(z_{0j}) + g_{0j}(z_{0j+1})) + (g_{n-1j}(z_{nj}) - g_{n-1j}(z_{nj+1}))$$

L'ultima riga è nulla perché $z_{0j} = z_0 = z_{0j+1}$ e $z_{nj} = z_1 = z_{nj+1}$. D'altra parte la funzione $g_{ij} - g_{i+1j}$ è costante sull'aperto connesso $D_{ij} \cap D_{i+1j}$, e quindi si ha:

$$g_{ij}(z_{i+1j}) - g_{i+1j}(z_{i+1j}) = g_{ij}(z_{i+1j+1}) - g_{i+1j}(z_{i+1j+1})$$

per ogni $i = 1, \ldots, n-2$, $j = 0, \ldots, m-1$. Sostituendo si trova $S_j - S_{j+1} = 0$. $\diamond$

Nel caso degli aperti semplicemente connessi abbiamo il seguente:

Corollario 2.4.5 *Sia U un aperto semplicemente connesso, e sia $f \in H(U)$. Allora per ogni arco chiuso γ in U si ha*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Equivalentemente, dati $z_0, z_1 \in U$, e due archi γ, η di estremi z_0 e z_1,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz$$

Inoltre f possiede una primitiva in U.

Dim. L'equivalenza delle due prime affermazioni è evidente. Dimostriamo la prima. Poiché γ è omotopo ad un arco costante c_{z_0}, si ha, per il teorema di Cauchy:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{c_{z_0}} f(z)dz = 0$$

L'ultima affermazione segue dal Teorema 2.2.5(ii). $\diamond$

L'esistenza di primitive garantita dal Corollario 2.4.5 è di grande importanza. Come semplice applicazione abbiamo:

Proposizione 2.4.6 *L'aperto $U = \mathbf{C} \backslash \{0\}$ non è semplicemente connesso.*

Dim. La funzione $f(z) = 1/z$ è olomorfa in U, ma non possiede una primitiva in U (Esempio 2.2.6). Quindi U non è semplicemente connesso, per il Corollario 2.4.5. $\diamond$

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso e sia $\alpha \in U$. Se $f \in H(U)$ possiede una primitiva $g(z)$ in U allora esiste una costante c tale che

$$g(z) = \int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta + c$$

dove l'integrale è esteso ad un qualsiasi arco congiungente α a z (Teorema (2.2.4)). Ad esempio, se $z_0 \in \mathbf{C}$ è un punto qualsiasi e se

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

è somma di una serie convergente in un disco $D = D(z_0, R)$, $R > 0$, allora f ha la primitiva in D

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

e quindi in D

$$h(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta + c$$

per qualche c, perché D è connesso.

Esempio 2.4.7 Consideriamo l'aperto $U = \mathbf{C} \setminus \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$, che è semplicemente connesso (Esempio 2.1.12). La funzione $1/z$ è olomorfa in U e quindi, per il Corollario 2.4.5, possiede una primitiva che può essere espressa nella forma:

$$g(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

D'altra parte, la serie

$$l(z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

converge in $D = D(1, 1)$ e soddisfa $l'(z) = 1/z$, cioè $l(z)$ è una primitiva di $1/z$ nel disco D. Pertanto, essendo $l(1) = 0 = g(1)$ ed essendo D connesso, si ha $g(z) = l(z)$ in D. Nel disco D la funzione $l(z)$ è anche una inversa formale di e^w, cioè $e^{l(z)} = z$ (cfr. esercizio pag. **??**). Ma allora, per il principio di identità delle funzioni analitiche, si ha anche

$$e^{g(z)} = z$$

in U. In altre parole $g(z)$ definisce una determinazione di $\ln z$ in U. Se $g(z) + c$ è un'altra primitiva di $1/z$, si ha

$$e^{g(z)+c} = z e^c$$

e quindi $g(z) + c$ definisce un'altra determinazione di $\ln z$ se e solo se $e^c = 1$, cioè se e solo se $c = 2k\pi i$ per qualche intero k. Vediamo pertanto che tra tutte le primitive di $1/z$ le determinazioni di $\ln z$ sono precisamente quelle della forma:

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} + 2k\pi i$$

2.5 La formula integrale di Cauchy

Il seguente risultato fornisce una semplice espressione per il valore di una funzione olomorfa in un punto.

Teorema 2.5.1 (Formula integrale di Cauchy) *Sia f olomorfa in un aperto U contenente un disco chiuso $\overline{D}$. Sia γ la frontiera di $\overline{D}$ percorsa in senso antiorario. Allora, per ogni $z_0 \in D$ si ha:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Dim. Sia $r > 0$ e sia η la circonferenza di centro z_0 e raggio r. Se r è sufficientemente piccolo allora γ e η sono omotope (Esempio 2.1.9, pag. 56). Sia $U_0 = U \backslash \{z_0\}$. Allora γ e η sono contenute in U_0 e sono omotope in U_0, come risulta dalla definizione dell'omotopia ψ dell'Esempio 2.1.9. La funzione

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

è olomorfa in U_0. Per il Teorema 2.4.4 abbiamo:

$$\int_\gamma g(z)dz = \int_\eta g(z)dz$$

Poiché f è olomorfa in z_0 segue che g è limitata in un intorno di z_0. Sia $|g| \leq B > 0$ per ogni $|z - z_0| < \epsilon$. Allora, se $r < \epsilon$ si ha:

$$\left| \int_\eta g(z)dz \right| \leq B\, 2\pi r$$

Poiché il secondo membro tende a 0 al tendere di r a 0 otteniamo

$$0 = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}$$

Ma:

$$\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0} = f(z_0)2\pi i$$

e la formula di Cauchy segue. $\diamond$

Le più importanti conseguenze della formula di Cauchy sono il seguente teorema e il suo corollario.

Teorema 2.5.2 *Sia f olomorfa in un aperto U contenente un disco chiuso $\overline{D} = \overline{D(z_0, R)}$ di centro un punto z_0 e raggio $R > 0$. Sia γ la frontiera di $\overline{D}$ percorsa in senso antiorario. Allora f ha un'espansione in serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k \tag{2.5}$$

i cui coefficienti sono dati dalla formula:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

e si ha:

$$|a_k| \leq \frac{||f||_\gamma}{R^k} \tag{2.6}$$

Le (2.6) sono dette disuguaglianze di Cauchy. *In particolare il raggio di convergenza della serie (2.5) è $\geq R$.*

Dim. Per il teorema 2.5.1 abbiamo, per tutti gli $z \in D(z_0, R)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

Sia $0 < s < R$, e scriviamo:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\zeta-z} &= \tfrac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = \tfrac{1}{\zeta-z_0}\left(\tfrac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\right) \\ &= \tfrac{1}{\zeta-z_0}\left(1+\tfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\tfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots\right) \end{aligned}$$

Se $\zeta \in \partial D_R(z_0)$ e $|z-z_0| \leq s$ si ha

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| \leq s/R < 1$$

e quindi la serie nella precedente espressione converge assolutamente e uniformemente; inoltre la funzione f è limitata su γ. Allora, per il Lemma 2.2.2, pag. 60, possiamo integrare termine a termine e otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k\geq 0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k\geq 0} a_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

dove

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

La stima sui moduli dei coefficienti segue dalla stima dell'integrale a secondo membro data dal Lemma 2.2.1(iii), pag. 59, tenendo conto che $L(\gamma) = 2\pi R$, e che $|\zeta - z_0| = R$. Dal criterio della radice segue subito che il raggio di convergenza della serie è $\geq R$. $\diamond$

Corollario 2.5.3 *Se $f \in H(U)$ allora f è analitica in U.*

Dim. Segue immediatamente dal Teorema 2.5.1. $\diamond$

Poiché sappiamo che ogni funzione analitica è olomorfa, vediamo che queste due classi di funzioni coincidono. Pertanto **d'ora in poi non faremo distinzione tra funzioni analitiche e funzioni olomorfe.**

Dal Corollario 2.5.3 deduciamo il seguente risultato:

Teorema 2.5.4 (Morera) *Sia f una funzione continua su un aperto connesso $U \subset \mathbf{C}$. Supponiamo che per ogni disco aperto $D \subset U$ si abbia*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

per ogni arco chiuso contenuto in D. Allora f è olomorfa.

Dim. Per il Teorema 2.2.5(ii), per ogni $D \subset U$, $f_{|D}$ possiede una primitiva g. Poiché g è olomorfa, essa è anche analitica in U, per il Corollario 2.5.3. Ma allora $f_{|D} = g'$ è anch'essa analitica, e quindi olomorfa. Poiché U può essere ricoperto da dischi aperti, segue che f è olomorfa in U. $\diamond$

Dimostriamo un altro importante risultato che discende dal Teorema 2.5.2:

Teorema 2.5.5 (Liouville) *Una funzione intera e limitata è costante.*

Dim. Ricordiamo che una funzione si dice intera se è olomorfa in tutto il piano. Poiché f è intera possiede uno sviluppo in serie della forma:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

che ha raggio di convergenza ∞, per il teorema 2.5.2. Sia $B > 0$ tale che $|f(z)| \leq B$ per ogni $z \in \mathbf{C}$. Allora $||f||_{C_R} \leq B$ per ogni $R > 0$ e dal Teorema 2.5.2 deduciamo:

$$|a_k| \leq \frac{B}{R^k}$$

per ogni $k \geq 0$ e per ogni $R > 0$. Ne discende $a_k = 0$ per ogni $k \geq 1$, cioè $f = a_0$, una costante. $\diamond$

Esempio 2.5.6 Le funzioni e^z, $\sin z$, $\cos z$ sono intere e non costanti, quindi non limitate. Questo fatto è evidente per la funzione esponenziale, che non è limitata anche come funzione di variabile reale. Le due funzioni trigonometriche invece sono limitate come funzioni di variabile reale. Ma se $z = iy$ è puramente immaginario allora:

$$|\cos iy| = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \geq \frac{e^y}{2}$$

e quindi

$$\lim_{y \to +\infty} |\cos iy| = \infty$$

Similmente si dimostra che $\sin z$ non è limitata.

Corollario 2.5.7 *Una funzione intera e non costante ha immagine densa in* $\mathbf{C}$.

Dim. Supponiamo che $f(z)$ sia una funzione intera. Se la sua immagine non è densa allora esistono $\alpha \in \mathbf{C}$ e $s > 0$ tali che

$$|f(z) - \alpha| > s$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$. La funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

è intera e soddisfa $|g(z)| < 1/s$ per ogni $z \in \mathbf{C}$, cioè è limitata. Ma allora g è costante per il teorema di Liouville, e quindi anche f è costante. $\diamond$

Il Corollario 2.5.7 è un caso particolare di un teorema più preciso, dovuto a Picard, il quale afferma che l'immagine di una funzione intera non costante consiste di tutto $\mathbf{C}$ privato di al più un punto. La dimostrazione del teorema di Picard è molto più difficile.

Il teorema di Liouville permette di dare un'altra dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, già dimostrato a pag. 49 utilizzando il principio del massimo modulo.

Corollario 2.5.8 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Sia*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$$

un polinomio non costante a coefficienti complessi. Allora f possiede almeno una radice, cioè esiste z_0 tale che $f(z_0) = 0$.

Dim. Possiamo supporre $a_d \neq 0$, $d > 0$. Se $f(z) \neq 0$ per ogni z allora la funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

è ancora una funzione intera. Scrivendo:

$$f(z) = a_d z^d \left(\frac{a_d^{-1} a_0}{z^d} + \frac{a_d^{-1} a_1}{z^{d-1}} + \cdots + 1 \right)$$

vediamo che

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty \tag{2.7}$$

e quindi

$$\lim_{|z| \to \infty} |g(z)| = 0$$

Ne discende che, se $R \gg 0$, $|g(z)|$ è limitato dal suo massimo nel disco chiuso di raggio R, in particolare g è limitata. Ma allora g è costante, per il teorema di Liouville, e quindi f è costante, una contraddizione. $\diamond$

Osservazione: lo stesso ragionamento non può applicarsi alla funzione $f(z) = e^z$ per dimostrare che possiede qualche zero, perché l'analoga della (2.7) non è vera.

Capitolo 3

Singolarità isolate e residui

3.1 Serie di Laurent

Una *serie di Laurent formale* è una serie formale

$$\sum_n a_n T^n$$

in cui la somma è estesa a tutti gli interi $n \in \mathbb{Z}$. Ad una serie di Laurent sono associate due serie formali (nel senso della definizione del paragrafo 1.2) $\sum_{n\geq 0} a_n T^n$ e $\sum_{n>0} a_{-n} T^n$. Supponiamo che le due serie abbiano raggi di convergenza positivi, siano essi rispettivamente r_1 ed $1/r_2$, intendendo $r_2 = 0$ nel caso in cui la seconda serie abbia raggio di convergenza ∞. Allora la funzione

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

è olomorfa nel disco aperto $D(0, r_1)$. La funzione

$$g(u) = \sum_{n>0} a_{-n} u^n$$

è olomorfa per $|u| < \frac{1}{r_2}$ e la sua derivata è la funzione somma della serie:

$$g'(u) = \sum_{n>0} n a_{-n} u^{n-1}$$

Pertanto la funzione

$$f_2(z) = g(1/z) = \sum_{n<0} a_n z^n \tag{3.1}$$

è ben definita ed olomorfa per $|z| > r_2$. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} f_2'(z) &= -\frac{1}{z^2} g'(1/z) \\ &= -\sum_{n>0} n a_{-n} z^{-(n-1)-2} \\ &= \sum_{n>0} -n a_{-n} z^{-n-1} \\ &= \sum_{n<0} n a_n z^{n-1} \end{aligned}$$

e pertanto $f_2(z)$ è olomorfa per $|z| > r_2$ e la sua derivata è la somma della serie ottenuta derivando termine a termine la serie (3.1).

Supponiamo che sia $r_2 < r_1$. Allora la somma delle serie

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \tag{3.2}$$

è olomorfa nella corona circolare aperta

$$K = \{z : r_2 < |z| < r_1\}$$

e la sua derivata è la somma della serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$ ottenuta derivando la (3.2) termine a termine. La (3.2) è detta una *serie di Laurent convergente nella corona circolare* K. Nella definizione non si escludono i casi $r_2 = 0$ e $r_1 = \infty$. È immediato verificare che la serie (3.2) converge uniformemente e assolutamente nella corona circolare chiusa $\{z : \rho_2 \leq |z| \leq \rho_1\}$, per ogni $r_2 < \rho_2 < \rho_1 < r_1$.

Il coefficiente a_{-1} di $1/z$ è detto il *residuo* della serie di Laurent (3.2).

3.2 La serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare

Sia $a \in \mathbf{C}$ e sia $f(z)$ una funzione definita in una corona circolare aperta

$$K = \{z : r_2 < |z - a| < r_1\} \tag{3.3}$$

Diremo che *f ha uno sviluppo in serie di Laurent* se esiste una serie di Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ convergente nella corona circolare K la cui somma coincide con f. Per quanto dimostrato nel paragrafo precedente, $f(z)$ è olomorfa in K.

Teorema 3.2.1 *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nella corona circolare aperta (3.3). Allora f possiede uno sviluppo in serie di Laurent, che è unico.*

Dim. Sia (3.3) la corona circolare in cui è definita $f(z)$. Possiamo supporre $a = 0$, salvo a sostituire $t = z - a$ e considerare la funzione $f(t+a)$. Fissiamo numeri reali positivi $\rho_1', \rho_1, \rho_2', \rho_2$ tali che

$$r_2 < \rho_2' < \rho_2 < \rho_1 < \rho_1' < r_1$$

Siano

$$\gamma_1(t) = \rho_1' e^{it}, \qquad \gamma_2(t) = \rho_2' e^{it}$$

$t \in [0, 2\pi]$, le circonferenze di raggi ρ_1' e ρ_2' rispettivamente. Sia z tale che $\rho_2 \leq |z| \leq \rho_1$. Allora si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{3.4}$$

Per verificarlo sia $\theta_0 = \arg(z)$, e si consideri un settore circolare

$$\Sigma_\epsilon = \{u : \rho_2' \leq |u| \leq \rho_1', \, \theta_0 - \epsilon \leq \arg(u) \leq \theta_0 + \epsilon\}$$

per $0 < \epsilon < \pi$. Sia F_ϵ la frontiera di Σ_ϵ. Allora

$$F_\epsilon = \{\eta_1, S_\epsilon, \eta_2, R_\epsilon\}$$

è un arco costituito da quattro curve, di cui η_1 e η_2 sono archi delle circonferenze γ_1 e γ_2^-, mentre

$$S_\epsilon(s) = [\rho_1' + s(\rho_2' - \rho_1')] e^{i(\theta_0 + \epsilon)}$$

$$R_\epsilon(s) = [\rho_2' + s(\rho_1' - \rho_2')] e^{i(\theta_0 - \epsilon)}$$

sono segmenti contenuti in semirette per l'origine. Allora:

(i) per ogni $0 < \epsilon, \epsilon' < \pi$, gli archi F_ϵ e $F_{\epsilon'}$ sono omotopi.

(ii) se $\epsilon > 0$ è sufficientemente piccolo, F_ϵ è omotopo ad una circonferenza C_r di raggio $r > 0$ contenuta nella corona circolare $\rho_2' \leq |u| \leq \rho_1'$.

Pertanto, per la formula di Cauchy e per il Teorema 2.4.4, si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{F_\epsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

Quando $\epsilon \to \pi$ l'integrale a secondo membro tende a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

cioè al secondo membro della (3.4)). Pertanto la (3.4)) è dimostrata.

Consideriamo il primo integrale nella (3.4)). Possiamo scrivere

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

e, poiché questa serie converge uniformemente nella circonferenza γ_1, possiamo integrare termine a termine, ottenendo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$$

Consideriamo ora il secondo integrale nella (3.4)). Scriviamo:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z(1 - \frac{\zeta}{z})} = -\sum_{n<0}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

Sostituendo nell'integrale e integrando termine a termine grazie all'uniforme convergenza della serie in γ_2, otteniamo:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n<0} a_n z^n$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$$

Pertanto, dalla (3.4)) otteniamo:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \tag{3.5}$$

per ogni $\rho_2 \leq |z| \leq \rho_1$. Facendo tendere $\rho_2 \to r_2$ e $\rho_1 \to r_1$ vediamo che la (3.5) fornisce lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ nella corona circolare $r_2 < |z| < r_1$.

Unicità. Scriviamo $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$, dove

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

e

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n < 0} a_n z^n$$

sono funzioni univocamente determinate da $f(z)$. Poiché $f_1(z)$ è olomorfa nel disco $D(0, r_1)$, i coefficienti a_n, $n \geq 0$, sono univocamente determinati. D'altra parte, la funzione $f_2(1/u)$ è olomorfa nel disco $D(0, 1/r_2)$ e quindi anche il suo sviluppo in serie di potenze è univocamente determinato, cioè i coefficienti a_n, $n < 0$, sono univocamente determinati. $\diamond$

Esempio 3.2.2 La funzione $f(z) = 1/z^n$, $n > 0$, è olomorfa nella corona circolare $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, e coincide con la sua serie di Laurent.

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z - 1}$$

è olomorfa in $\mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$. Il suo sviluppo in serie di Laurent in 0 è:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n \geq 0} z^n$$

e questa serie converge in $0 < |z| < 1$. Invece lo sviluppo in serie di Laurent di f in 1 è:

$$\frac{1}{z - 1} + \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z - 1)^n$$

e converge nella corona circolare $0 < |z - 1| < 1$.

La funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ è olomorfa nella corona circolare $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. La sua serie di Laurent è:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!z^n}$$

Esempio 3.2.3 La serie di Laurent

$$g(z) = \sum_{n\leq 0} z^n$$

converge nella corona circolare $1 < |z|$ e ha per somma la funzione $\frac{z}{z-1}$. Infatti

$$g(1/z) = \sum_{n\geq 0} z^n$$

converge in $D(0,1)$ e ha per somma $\frac{1}{1-z}$. Si osservi che la funzione $\frac{z}{z-1}$ è somma della serie

$$\sum_{n\geq 1} -z^n$$

nel disco $D(0,1)$.

3.3 Singolarità isolate

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto e $a \in U$. Se $f \in H(U\setminus\{a\})$ diremo che *f ha una singolarità isolata nel punto a.* In tal caso, per il Teorema 3.2.1, f possiede uno sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n \tag{3.6}$$

nella corona circolare

$$D(a,R)\setminus\{a\} = \{z : 0 < |z-a| < R\}$$

per qualche $R > 0$.

Definizione 3.3.1 *Nella situazione precedente diremo che*

- *f ha una* singolarità eliminabile *in a, ovvero a* è una singolarità eliminabile *per f, se la serie (3.6) è una serie di potenze, cioè $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.*

- *f ha una* singolarità polare *in a, ovvero a è un* polo *per f, se $a_n \neq 0$ per qualche $n < 0$, e solo un numero finito di coefficienti a_n, con $n < 0$, è diverso da 0. Se $m > 0$ è il più grande intero tale che $a_{-m} \neq 0$ diremo che f ha un polo di ordine m in a, ovvero che a è un polo di ordine m per f. Diremo anche che f ha ordine $-m$ in a, e scriveremo $-m = o_a(f)$.*

- *f ha una* singolarità essenziale *in a, ovvero a* è una singolarità essenziale per f*, se $a_n \neq 0$ per infiniti $n < 0$.*

Teorema 3.3.2 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $a \in U$ e $f \in H(U \backslash \{a\})$. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) La funzione f ha una singolarità eliminabile in a.

(ii) f può essere estesa ad un funzione olomorfa in tutto U.

(iii) f è limitata in $D(a, R) \backslash \{a\}$ per qualche $R > 0$.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii). Se f ha una singolarità eliminabile la serie di Laurent (3.6) si riduce ad una serie di potenze a raggio di convergenza positivo, la cui somma è una funzione olomorfa in un intorno di a che estende f.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Se f si estende a tutto U allora il suo sviluppo di Taylor in a coincide con il suo sviluppo in serie di Laurent in a e quindi la singolarità è eliminabile.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) è ovvio.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Se $n < 0$ allora:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} f(z) z^{-n-1} dz$$

dove $0 < r < R$ e $C_r(a)$ è la circonferenza di centro a e raggio r (vedere la dimostrazione del Teorema 3.2.1). Poiché f è limitata in un intorno di a l'integrale a secondo membro tende a 0 al tendere di $r \to 0$, e quindi $a_n = 0$. $\diamond$

Se $f \in H(U \backslash \{a\})$ e (3.6) è il suo sviluppo di Laurent in a, la funzione somma della serie:

$$Q(z) = \sum_{n<0} a_n (z - a)^n$$

è olomorfa in $\mathbf{C}\backslash\{a\}$, e si dice la *parte principale* di $f(z)$ in a. Allora:

$$f(z) - Q(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$$

in un disco di centro a, e quindi ha una singolarità eliminabile in a. Pertanto $f(z) - Q(z)$ si estende ad una funzione olomorfa in U.

È immediato verificare che *se $f \in H(U\backslash\{a\})$ ha un polo di ordine m in a allora $(z-a)^m f(z)$ è olomorfa in tutto U.* Viceversa, se $g \in H(U)$ allora

$$f(z) = (z-a)^{-m} g(z) \in H(U\backslash\{a\})$$

e f ha un polo di ordine m in a. Lo sviluppo in serie di Laurent di f in a ha la forma:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$$

In questo caso la parte principale di f in a è la funzione razionale:

$$Q(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}$$

.

Un polo di ordine 1 si dice un *polo semplice*. Da quanto appena visto si deduce immediatamente la seguente proposizione:

Proposizione 3.3.3 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto e $f \in H(U\backslash\{a\})$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) f ha un polo di ordine $\leq m$ in a.

(ii) $(z-a)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile in a.

(iii) esistono $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{C}$ tali che

$$f(z) - \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{(z-a)^j}$$

abbia una singolarità eliminabile.

Se f è una funzione olomorfa in $U \backslash S$ dove $S \subset U$ è un sottoinsieme discreto, e se in ogni punto di S la f ha un polo o una singolarità eliminabile, diremo che f è *meromorfa* in U, o *su* U. Dalla definizione e dal Teorema 3.3.2 segue che le funzioni olomorfe in U sono particolari funzioni meromorfe.

Sia $f \in H(U)$ e sia $S \subset U$ l'insieme dei suoi zeri. Supponiamo U connesso e che f non sia identicamente nulla. Allora $S \neq U$ e per ogni $a \in S$ possiamo scrivere

$$f(z) = (z - a)^r h(z)$$

dove $r = o_a(f) > 0$ e $h \in H(U)$ soddisfa $h(a) \neq 0$. Pertanto $g(z) = 1/h(z)$ è olomorfa in un intorno di a e quindi la funzione

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^{-r} g(z)$$

è meromorfa in un intorno di a, e ha ordine $-r$ in a. Vediamo quindi che *se una funzione f è meromorfa nell'intorno di un punto a allora anche $1/f$ lo è e inoltre una almeno delle due funzioni è olomorfa in a.*

Da quanto appena osservato, possiamo concludere che se U è connesso e $f, g \in H(U)$ con g non identicamente nulla, allora f/g è meromorfa in U. In particolare, se $P(z), Q(z)$ sono polinomi, e $Q \neq 0$, allora P/Q è una funzione meromorfa in $\mathbf{C}$.

Denotiamo con $M(U)$ l'insieme delle funzioni meromorfe su un aperto connesso U. Dalla discussione che precede segue immediatamente che per ogni $f, g \in M(U)$ si ha che $f \pm g, fg \in M(U)$ e, se g non è identicamente nulla, anche $f/g \in M(U)$. Ciò implica che $M(U)$ è un campo, che viene chiamato il *campo delle funzioni meromorfe su* U.

Teorema 3.3.4 (Casorati-Weierstrass) *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $a \in U$, e $f \in H(U \backslash \{a\})$. Se a è una singolarità essenziale per f allora per ogni disco aperto D di centro a e contenuto in U, l'immagine $f(D \backslash \{a\})$ è un sottoinsieme denso di $\mathbf{C}$.*

Dim. Supponiamo per assurdo che il teorema sia falso per un disco $D = D(a, R)$. Allora esistono $\alpha \in \mathbf{C}$ e $s > 0$ tali che

$$|f(z) - \alpha| > s$$

per ogni $z \in D \backslash \{a\}$. La funzione:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

è olomorfa in $D\backslash\{a\}$ e limitata in D. Quindi, per il Teorema 3.3.2, a è una singolarità eliminabile per g, e g può essere estesa ad una funzione olomorfa in D. Pertanto

$$\frac{1}{g(z)} = f(z) - \alpha$$

ha al più un polo in a, e ciò è vero anche per $f(z)$. Ma cosi' è contraddetta l'ipotesi che f abbia una singolarità essenziale in a. $\diamond$

Corollario 3.3.5 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $a \in U$, e $f \in H(U\backslash\{a\})$. a è una singolarità essenziale per f se e solo se non esiste il limite:*

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

Dim. Dal Teorema 3.3.4 segue che se a è una singolarità essenziale allora il limite non esiste. D'altra parte se a è una singolarità eliminabile allora il limite esiste finito per il Teorema 3.3.2. Se invece a è un polo di ordine $m \geq 1$ per f allora $f(z) = (z-a)^{-m} g(z)$ con $g(z)$ una funzione che ha una singolarità eliminabile in a. Pertanto:

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(z-a)^m} \lim_{z\to a} g(z) = \infty$$

e quindi anche in questo caso il limite esiste. $\diamond$

Esempio 3.3.6 La funzione $e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in 0 perché il suo sviluppo in serie di Laurent è:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! z^n}$$

In questo caso è facile verificare direttamente la validità del Teorema 3.3.4. Sia infatti $R > 0$ arbitrario, $D = D(0, R)$, e sia $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$. Allora esiste un numero intero $k \gg 0$ tale che

$$w := \log|\alpha| + i(\arg(\alpha) + 2k\pi)$$

abbia $|w| > 1/R$. Ma allora $z := 1/w \in D$ e

$$e^{\frac{1}{z}} = e^w = \alpha$$

Quindi l'immagine di D tramite la funzione $e^{\frac{1}{z}}$ è $\mathbf{C}\backslash\{0\}$; in particolare tale immagine è densa.

Esempio 3.3.7 In modo simile a quanto fatto nell'esempio 3.3.6 si verifica che la funzione $\sin\frac{1}{z}$ ha una singolarità essenziale nell'origine. La funzione:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

è olomorfa in $\mathbf{C}\backslash S$, dove $S = \{0, 1/k\pi : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$. In ogni punto $0 \neq a \in S$ la $g(z)$ ha un polo semplice. In $a = 0$ la g non ha una singolarità isolata, perché 0 è un punto di accumulazione di poli di g. Quindi $g(z)$ non possiede uno sviluppo in serie di Laurent in 0. Quest'esempio mostra che l'insieme delle funzioni che possiedono singolarità isolate in un fissato aperto connesso U in generale non costituiscono un campo, come invece avviene per l'insieme $M(U)$ delle funzioni *meromorfe* su U.

Esempio 3.3.8 La funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2-1}}$$

possiede singolarità isolate in $z = \pm 1$ che sono singolarità essenziali. Ciò si verifica facilmente utilizzando il Corollario 3.3.5. La restrizione di f a all'intervallo reale $[-1, 1]$ si prolunga ad una funzione φ su tutto $\mathbf{R}$ definendola identicamente zero al di fuori di $[-1, 1]$. La funzione φ è un ben noto esempio di funzione di variabile reale di classe C^∞ che non è analitica.

3.4 Il teorema dei residui

Sia $f(z)$ una funzione avente una singolarità isolata in un punto $z_0 \in \mathbf{C}$ e sia

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \tag{3.7}$$

il suo sviluppo in serie di Laurent in z_0. Il coefficiente a_{-1} è detto *residuo di f in z_0*. Verrà talvolta denotato con

$$a_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0}(f)$$

Il residuo ha la seguente interpretazione.

Proposizione 3.4.1 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $z_0 \in U$, e sia $f \in H(U \backslash \{z_0\})$. Se C_r è una circonferenza di centro z_0 e raggio r percorsa in senso antiorario, contenuta in U insieme al disco $D(z_0, r)$, allora*

$$\int_{C_r} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f)$$

Dim. Per l'ipotesi f possiede uno sviluppo in serie di Laurent (3.7) in $D(z_0, R) \backslash \{0\}$ per qualche $R > r$. Quindi la serie converge uniformemente in C_r, e pertanto f può essere integrata termine a termine su C_r, cioè

$$\int_{C_r} f(z)dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \int_{C_r} (z - z_0)^n dz$$

Ma tutti gli integrali a secondo membro sono nulli eccetto quello relativo al valore $n = -1$, che è uguale a $2\pi i$. $\diamond$

Avremo bisogno della seguente nozione.

Definizione 3.4.2 *Sia γ un arco chiuso in $\mathbf{C}$ e $z_0 \in \mathbf{C}$ un punto non appartenente all'immagine di γ.* L'indice di γ rispetto a z_0, *è*

$$I(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Lemma 3.4.3 *Sia γ un arco chiuso in $\mathbf{C}$ e $z_0 \in \mathbf{C}$ un punto non appartenente all'immagine di γ. Allora $I(\gamma, z_0)$ è un numero intero.*

Dim. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$, e consideriamo la funzione $F : [a, b] \to \mathbf{C}$ definita da:

$$F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - z_0} d\tau$$

Si ha

$$F(a) = 0, \qquad F(b) = 2\pi i I(\gamma, z_0)$$

Si osservi che, essendo γ differenziabile a tratti su $[a, b]$, la F è ben definita come somma di integrali estesi ai sottointervalli chiusi di $[a, t]$ su cui $\gamma'(\tau)$ è definita. Per lo stesso motivo la $F(t)$ è continua e differenziabile a tratti in $[a, b]$, e la sua derivata è:

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

Si ha:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-F(t)}(\gamma(t)-z_0)\right] = e^{-F(t)}\gamma'(t) - F'(t)e^{-F(t)}(\gamma(t)-z_0) = 0$$

e quindi esiste una costante C tale che $e^{-F(t)}(\gamma(t)-z_0) = C$, cioè

$$\gamma(t) - z_0 = Ce^{F(t)}$$

Inoltre $C \neq 0$ perché $\gamma(t) \neq z_0$ per ogni t. Ma allora, essendo $\gamma(a) = \gamma(b)$, si ha $Ce^{F(a)} = Ce^{F(b)}$, cioè $e^{F(a)} = e^{F(b)}$, e quindi esiste un intero k tale che:

$$F(b) = F(a) + 2k\pi i$$

Poiché $F(a) = 0$ e $F(b) = 2\pi i I(\gamma, z_0)$, deduciamo che $I(\gamma, z_0) = k$. $\diamond$

Intuitivamente, $I(\gamma, z_0)$ conta il numero di giri percorsi da γ intorno a z_0, con segno positivo o negativo a seconda che il senso di rotazione sia antiorario o orario. Ad esempio, se $r > 0$ e $C_r : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ è la circonferenza $C_r(t) = re^{it}$ allora $I(C_r, 0) = 1$ (Esempio 2.2.3, pag. 60).

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ è un arco chiuso, e $U = \mathbf{C}\backslash\gamma([a, b]) \subset \mathbf{C}$ il complementare dell'immagine di γ, allora U si suddivide in componenti connesse per archi. Poiché $\gamma([a, b])$ è un sottoinsieme chiuso e limitato, esiste $R > 0$ tale

$$\gamma([a, b]) \subset \overline{D(0, R)}$$

Pertanto, dato che $\mathbf{C}\backslash\overline{D(0, R)}$ è connesso per archi, U possiede un'unica componente connessa per archi *illimitata* E. I punti di E si diranno *punti esterni* a γ. Gli altri punti di U si diranno *punti interni* a γ.

Un'altra proprietà significativa dell'indice è descritta dal seguente lemma:

Lemma 3.4.4 *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ un arco chiuso e sia $U = \mathbf{C}\backslash\gamma([a, b]) \subset \mathbf{C}$ il complementare dell'immagine di γ. La funzione*

$$z \mapsto I(\gamma, z)$$

è costante su ogni componente connessa di U e vale 0 sui punti esterni a γ.

Dim. Poiché la funzione dell'enunciato è a valori interi, sarà sufficiente dimostrare che è continua su U. Ciò è equivalente a far vedere che, per ogni $z_0 \in U$,

$$\int_\gamma \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) d\zeta$$

tende a 0 quando $z \to z_0$. Poiché $[a, b]$ è compatto è ben definito il numero reale

$$s := \min_{t \in [a,b]} \{|\gamma(t) - z_0|\}$$

e $s > 0$ perché $z_0 \notin \gamma([a, b])$. Tenendo conto che

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}$$

e osservando che $|\gamma(t) - z| > s/2$ quando z è sufficientemente vicino a z_0, otteniamo

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right| < \frac{1}{s^2/4}|z - z_0|$$

Quindi

$$\left|\int_\gamma \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) d\zeta\right| < \frac{1}{s^2/4}|z - z_0|L(\gamma)$$

La conclusione segue dal fatto che il secondo membro tende a 0 quando $z \to z_0$.

Per dimostrare l'ultima affermazione osserviamo che si ha

$$I(\gamma, z) \leq \max_{t \in [a,b]} \frac{1}{|z - \gamma(t)|} L(\gamma)$$

Poiché

$$\lim_{|z| \to \infty} \max_{t \in [a,b]} \frac{1}{|z - \gamma(t)|} = 0$$

si ha che $I(\gamma, z) \to 0$ quando $|z| \to \infty$, e quindi $I(\gamma, z) = 0$ se $z \in E$.

◇

Diamo ora una formulazione del teorema dei residui, che è sufficientemente generale per il calcolo pratico di molti integrali complessi.

Teorema 3.4.5 (dei residui) *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto semplicemente connesso, $z_1, \ldots, z_n$ punti distinti di U, $f \in H(U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$. Se γ è un arco chiuso contenuto in U la cui immagine non contiene alcun punto z_j, allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j}(f) I(\gamma, z_j)$$

Quest'identità è detta formula dei residui.

Dim. Siano $Q_1, \dots, Q_n$ le parti principali di f in $z_1, \dots, z_n$ rispettivamente. Allora

$$g(z) = f(z) - Q_1 - \cdots - Q_n$$

si estende ad una funzione olomorfa in U, e quindi $\int_\gamma g(z)dz = 0$, per il Corollario 2.4.5. Pertanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_\gamma Q_j(z)dz \tag{3.8}$$

Ma poiché

$$\int_\gamma (z-z_j)^n = 0, \qquad n \neq -1 \tag{3.9}$$

(Esempio 2.2.6) abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma Q_j(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{Res}_{z_j}(f)}{(z-z_j)}dz = \mathrm{Res}_{z_j} I(\gamma, z_j)$$

e la conclusione segue. ◇

Si osservi che, a causa del Lemma 3.4.4, le singolarità di f che sono esterne a γ non danno alcun contributo al secondo membro della formula dei residui. Pertanto, quando si vuole applicare la formula, ci si può limitare a calcolare i residui nei soli punti interni a γ.

3.5 Calcolo esplicito di residui

Se una funzione $f(z)$ ha una singolarità eliminabile in un punto $z_0 \in \mathbf{C}$ allora ovviamente il suo residuo in z_0 è nullo.

Il caso di un polo semplice - Supponiamo che la funzione $f(z)$ abbia un polo semplice in $z_0 \in \mathbf{C}$. Allora la funzione

$$g(z) := (z-z_0)f(z)$$

ha una singolarità eliminabile in z_0 e

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

Se ad esempio

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

con P, Q olomorfe in un intorno di z_0, $P(z_0) \neq 0$, e Q ha uno zero semplice in z_0, allora $f(z)$ ha un polo semplice in z_0. Poiché

$$Q(z) = Q'(z_0)(z - z_0) + \sum_{n \geq 2} a_n (z - z_0)^n$$

vediamo che

$$(z - z_0) f(z) = \frac{P(z)}{Q'(z_0) + \sum_{n \geq 2} a_n (z - z_0)^{n-1}}$$

e quindi

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{3.10}$$

Questa formula risulta utile in particolare nel calcolo dei residui delle funzioni razionali.

Il caso di un polo multiplo - Supponiamo che $f(z)$ abbia un polo di ordine $m \geq 2$ in $z_0 \in \mathbf{C}$. Allora la funzione $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0, e il $\mathrm{Res}_{z_0}(f)$ coincide con il coefficiente di $(z - z_0)^{m-1}$ nello sviluppo in serie di Taylor di $g(z)$ in z_0. Pertanto abbiamo:

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

Il caso di una singolarità essenziale - In questo caso non ci sono metodi per facilitare il calcolo del residuo. Bisogna calcolare lo sviluppo di Laurent caso per caso.

Esempio 3.5.1 La funzione

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$$

è meromorfa in 0, e ha una singolarità eliminabile in 0, perché

$$o_0(f) = o_0(1 - \cos z) - o_0(z) = 2 - 1 = 1$$

Esempio 3.5.2 La funzione $f(z) = 1/\sin z$ ha un polo semplice in π. Per la formula (3.10) si ha

$$\mathrm{Res}_\pi(f) = \frac{1}{\cos \pi} = -1$$

Quindi

$$\int_{C_R} f(z)dz = \begin{cases} -2\pi i & \text{se } R > \pi \\ 0 & \text{se } 0 < R < \pi \end{cases}$$

Esempio 3.5.3 La funzione

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 1}{z^2(1-z)}$$

ha un polo di ordine $m = 2$ in 0 e un polo semplice in 1. Si ha:

$$\frac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \left[\frac{z^2 - 3z + 1}{1 - z}\right]' = \frac{-z^2 + 2z - 2}{(1-z)^2}$$

che calcolata in $z = 0$ dà:

$$\mathrm{Res}_0(f) = -2$$

Invece:

$$\frac{z^2 - 3z + 1}{(z^2(1-z))'} = \frac{z^2 - 3z + 1}{2z - 3z^2}$$

che calcolata in 1 dà $\mathrm{Res}_1(f) = 1$. Quindi

$$\int_{C_R} f(z)dz = \begin{cases} -4\pi i & \text{se } 0 < R < 1 \\ -3\pi i & \text{se } R > 1 \end{cases}$$

Esempio 3.5.4 Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z}$$

I suoi punti singolari sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. Il punto 1 è un polo semplice e si ha quindi, per la (3.10):

$$\mathrm{Res}_1(f) = \frac{e}{-1} = -e$$

0 è una singolarità essenziale per $f(z)$ perché altrimenti anche la funzione $e^{\frac{1}{z}} = f(z)(1-z)$ avrebbe un polo in 0, il che è falso. Sviluppiamo f in serie di Laurent nell'intorno di 0. Si ha:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= 1 + \tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{2!z^2} + \tfrac{1}{3!z^3} + \cdots \\ \tfrac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \end{aligned}$$

e quindi, moltiplicando:

$$\begin{aligned}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} &= \left(1+\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{2!z^2}+\tfrac{1}{3!z^3}+\cdots\right)(1+z+z^2+z^3+\cdots)\\ &= \left(1+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\cdots\right)\tfrac{1}{z}+\textstyle\sum_{n\neq -1} a_n z^n\end{aligned}$$

Quindi il residuo di $f(z)$ in 0 è:

$$\mathrm{Res}_0(f) = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = e-1$$

Esempio 3.5.5 (derivata logaritmica) Sia

$$f(z) = \sum_{k\geq m} a_k z^k = a_m z^m(1+h(z))$$

dove $m \in \mathbb{Z}$, la serie di Laurent di una funzione avente una singolarità al più polare in 0. Allora si ha

$$f'(z) = \sum_{k\geq m} k a_k z^{k-1} = m a_m z^{m-1}(1+h(z)) + a_m z^m h'(z)$$

e

$$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1+h(z)}$$

e $h'(z)/(1+h(z))$ è olomorfa in 0. Quindi

$$\mathrm{Res}_0(f'/f) = m$$

La funzione f'/f si dice *derivata logaritmica* di f. Quindi il suo residuo in 0 coincide con l'ordine di f in 0.

Quest'ultimo esempio ci conduce al seguente risultato:

Teorema 3.5.6 (dell'indicatore logaritmico) *Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in un aperto semplicemente connesso $U \subset \mathbf{C}$, e sia γ un arco chiuso contenuto in U, la cui immagine non contenga né zeri né poli di f. Allora la funzione f'/f è meromorfa in U, non ha singolarità sull'immagine di γ, e si ha:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}dz = \sum o_{z_j}(f) I(\gamma, z_j) \tag{3.11}$$

dove la somma è estesa agli zeri e ai poli di $f(z)$ interni a γ.

Dim. La derivata logaritmica, essendo quoziente di due funzioni meromorfe, è meromorfa in U. Più precisamente, dai calcoli locali effettuati nell'Esempio 3.5.5 risulta che f'/f ha un polo semplice, con residuo m, in ogni punto in cui f ha ordine $m \neq 0$, e nessun'altra singolarità. La conclusione ora segue dalla formula dei residui. $\diamond$

L'integrale a primo membro della (3.11) è detto *indicatore logaritmico* di f lungo γ (o *relativo a* γ). Il teorema precedente si applica utilmente in diverse situazioni. Prima di darne delle applicazioni introduciamo un nuovo concetto.

Sia $f(z) \in H(\mathbf{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$ una funzione olomorfa nel complementare in $\mathbf{C}$ di un numero finito di punti $z_1, \ldots, z_n$ che sono quindi singolarità isolate per f. Definiamo il *residuo di* $f(z)$ *all'infinito* come

$$\mathrm{Res}_\infty(f) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(z)dz$$

dove C_R è una circonferenza di centro l'origine e raggio $R \gg 0$ tale che tutte le singolarità di f siano contenute in $D(0, R)$. Per la formula dei residui e per la scelta di R abbiamo:

$$\mathrm{Res}_\infty(f) = -\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j}(f)$$

In particolare $\mathrm{Res}_\infty(f)$ non dipende da R. L'identità precedente può anche mettersi nella forma più suggestiva:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j}(f) + \mathrm{Res}_\infty(f) = 0 \tag{3.12}$$

Lemma 3.5.7 *Nella situazione precedente,* $\mathrm{Res}_\infty(f)$ *coincide con il residuo in* 0 *della funzione*

$$g(u) = -\frac{1}{u^2} f(1/u)$$

Dim. La funzione $g(u)$ non ha singolarità nella corona circolare $0 < |u| \leq R^{-1}$ e quindi:

$$\begin{aligned}
2\pi i \ \mathrm{Res}_0(g) &= \int_{C_{R^{-1}}} g(u)du \\
&= iR^{-1} \int_0^{2\pi} g(R^{-1}e^{it})e^{it}dt \\
&= -iR^{-1} \int_0^{2\pi} R^2 e^{-2it} f(Re^{-it})e^{it}dt \\
&= -iR \int_0^{2\pi} f(Re^{-it})e^{-it}dt \\
&= \int_{C_R^-} f(z)dz = -\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}_\infty(f)
\end{aligned}$$

$\diamond$

Alla luce del Lemma 3.5.7 l'identità (3.12) diventa più significativa, in quanto riduce il calcolo della somma dei residui di f a quello del residuo di g in 0.

Osservazione 3.5.8 Il motivo per cui nella definizione di residuo all'infinito si richiede che $f(z)$ abbia solo un numero finito di singolarità è che altrimenti $g(u)$ non ha una singolarità isolata in 0. Ad esempio

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

ha infiniti poli semplici e

$$f(1/u) = \frac{1}{\sin \frac{1}{u}}$$

non ha una singolarità isolata in 0 (si veda l'esempio 3.3.7).

Esempio 3.5.9 Si consideri l'integrale

$$\mathbf{I} = \int_{C_3} \frac{z^9}{z^{10} - 1} dz$$

dove C_3 è la circonferenza di centro 0 e raggio 3. Poiché i poli della funzione integranda $f(z)$ sono le radici decime dell'unità, essi sono interni a C_3, e si ha

$$\mathbf{I} = 2\pi i \sum_{j=1}^{10} \mathrm{Res}_{z_j}(f(z))$$

Il laborioso calcolo dei dieci residui può essere evitato utilizzando la (3.12), la quale implica

$$\mathbf{I} = -2\pi i \mathrm{Res}_\infty(f(z))$$

Si ha:

$$\mathrm{Res}_\infty(f(z)) = \mathrm{Res}_0(-u^{-2}f(u^{-1}) = \mathrm{Res}_0(-u^{-1}(1 + u^{10} + u^{20} + \cdots) = -1$$

Pertanto $\mathbf{I} = 2\pi i$.

Combinando il Lemma 3.5.7 con il Teorema 3.5.6 otteniamo la seguente versione del teorema fondamentale dell'algebra:

Teorema 3.5.10 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Un polinomio $P(z) \in \mathbf{C}[z]$ di grado n possiede n radici se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.*

Dim. La molteplicità di una radice α di $P(z)$ è uguale all'ordine della funzione $P(z)$ in α. Sia $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, con $a_n \neq 0$. La sua derivata logaritmica:

$$f(z) := \frac{P'(z)}{P(z)}$$

è meromorfa in $\mathbf{C}$ e possiede poli semplici nelle radici di $P(z)$ con residuo uguale alla rispettiva molteplicità (Esempio 3.5.5). Pertanto, poiché P possiede un numero finito di radici, è definito il $\mathrm{Res}_\infty(f)$. Si ha:

$$-\tfrac{1}{u^2}\, f(1/u) = -\tfrac{1}{u^2}\, P'(u^{-1})P(u^{-1})^{-1}$$

$$= -\tfrac{1}{u^2}(na_n u^{-n+1} + (n-1)a_{n-1}u^{-n+2} + \cdots + a_1)(a_n u^{-n} + \cdots + a_1 u^{-1} + a_0)^{-1}$$

$$= -\tfrac{1}{u}(na_n + (n-1)a_{n-1}u + \cdots + a_1 u^{n-1})(a_n + \cdots + a_1 u^{n-1} + a_0 u^n)^{-1}$$

$$= -\tfrac{n}{u} + ((n-1)a_{n-1} + \cdots)(1 + \cdots + a_n^{-1}a_1 u^{n-1} + a_n^{-1}a_0 u^n)^{-1}$$

dal che si vede che, per il Lemma 3.5.7:

$$\mathrm{Res}_\infty(f) = \mathrm{Res}_0\left(-\frac{1}{u^2}\, f(1/u)\right) = -n$$

Ora dalla formula (3.12) otteniamo:

$$\sum(\text{residui di } f) = -\mathrm{Res}_\infty(f) = n$$

e la conclusione segue dalla citata interpretazione dei residui di f come gli ordini degli zeri di P. $\diamond$

Diamo un'altra utile applicazione del Teorema 3.5.6.

Teorema 3.5.11 (Rouché) *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto semplicemente connesso, $\gamma : [a, b] \to U$ un arco chiuso, $f, g \in H(U)$. Supponiamo che si abbia:*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

per ogni $z \in \mathrm{Im}(\gamma)$. Allora:

$$\sum_{z \in U \setminus \mathrm{Im}(\gamma)} I(\gamma, z) o_z(f) = \sum_{z \in U \setminus \mathrm{Im}(\gamma)} I(\gamma, z) o_z(g)$$

Dim. L'insieme dei punti $z \in U$ tali che $I(\gamma, z)$ è definito e non nullo ha chiusura compatta e contenuta in U e quindi contiene un numero finito di zeri di f e di g. Pertanto le sommatorie dell'enunciato contengono solo un numero finito di addendi non nulli e sono ben definite.

L'ipotesi implica che f e g non hanno zeri su $\mathrm{Im}(\gamma)$. Possiamo dunque riscrivere l'ipotesi nella forma:

$$|F(z) - 1| < 1, \qquad z \in \mathrm{Im}(\gamma)$$

dove $F = g/f$. Ciò significa che la curva chiusa $F \circ \gamma$ è contenuta nel disco $D(1, 1)$ di centro 1 e raggio 1 e quindi $I(F \circ \gamma, 0) = 0$ perché $0 \notin D(1, 1)$. Abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned} 0 = I(F \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{F \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))}{F(\gamma(t))} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F'}{F} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (g'/g - f'/f) \end{aligned}$$

$\diamond$

Il caso particolare più utile del teorema di Rouché è il seguente:

Corollario 3.5.12 *Nelle ipotesi del Teorema 3.5.11, supponiamo che γ sia una circonferenza, percorsa in senso antiorario, frontiera di un disco aperto $D \subset U$. Allora f e g hanno lo stesso numero di zeri in D (se contati con le rispettive molteplicità).*

Dim. Segue subito dal Teorema 3.5.11 tenendo conto che $I(\gamma, z) = 1$ se $z \in D$ e $I(\gamma, z) = 0$ se $z \in \mathbf{C} \setminus \overline{D}$. $\diamond$

Esempio 3.5.13 Sia $g(z) = z^3 + z^2 + 4z + 1$. e sia C_R la circonferenza di centro 0 e raggio R. Ponendo $f(z) = 4z$ otteniamo:

$$|f(z) - g(z)| = |z^3 + z^2 + 1| \leq 3 < |4z| = 4, \qquad z \in \mathrm{Im}(C_1)$$

Quindi $g(z)$ possiede lo stesso numero di radici di $4z$, cioè 1, nel disco $D(0, 1)$. D'altra parte, prendendo $f(z) = z^3$ e $R = 3$ otteniamo

$$|f(z) - g(z)| = |z^2 + 4z + 1| \leq 22 < |z^3| = 27, \qquad z \in \mathrm{Im}(C_3)$$

e quindi $g(z)$ ha tutte e tre le radici in $D(0, 3)$, due delle quali stanno nella corona circolare $1 < |z| < 3$.

Esempio 3.5.14 Si consideri l'equazione:

$$z^2 - ae^z = 0$$

dove $0 < a < e^{-1}$. Vogliamo determinarne le soluzioni nel disco unitario $|z| < 1$. Ponendo $g(z) = z^2 - ae^z$ e $f(z) = z^2$ si ha, quando $|z = x + iy| = 1$:

$$|g(z) - f(z)| = | - ae^z| = |ae^x| \leq ae < 1 = |f(z)|$$

Quindi, applicando il teorema di Rouché, vediamo che l'equazione assegnata ha due radici nel disco unitario perché $f(z)$.

3.6 Calcolo di integrali definiti con il metodo dei residui

Il metodo dei residui permette di calcolare diverse classi di integrali definiti reali senza dover calcolare la primitiva della funzione integranda. In questo paragrafo illustreremo questo procedimento in alcuni casi significativi.

Integrali trigonometrici - Consideriamo un integrale della forma:

$$\mathbf{I} = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$$

dove $R(x, y)$ è una funzione razionale il cui denominatore non si annulla nei punti (x, y) tali che $x^2 + y^2 = 1$. Poniamo $z = e^{it}$. Si ha quindi:

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \qquad \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

e z varia nella circonferenza unitaria C_1 al variare di $0 \leq t \leq 2\pi$. Quindi:

$$\mathbf{I} = \int_{C_1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) dz$$

Applicando il teorema dei residui otteniamo la seguente identità:

$$\mathbf{I} = 2\pi \sum \mathrm{Res}_{z_j}\left[\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\right]$$

dove la somma è estesa ai poli z_j contenuti nel disco unitario $D(0, 1)$.

Esempio 3.6.1

$$\mathbf{I} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$$

dove $a > 1$ reale. Allora

$$\mathbf{I} = 2\pi \sum \mathrm{Res}_{z_j} \frac{2i}{z^2 + 2iaz - 1}$$

L'unico polo nel disco unitario della funzione a secondo membro è $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$. Il suo residuo è

$$\frac{i}{z_0 + ia} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Quindi:

$$\mathbf{I} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Esempio 3.6.2

$$\mathbf{I} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2}, \quad |a| < 1$$

Applicando il metodo precedente si ottiene:

$$\mathbf{I} = i \int_{C_1} \frac{dz}{az^2 - (a^2+1)z + a}$$

Il denominatore $f(z)$ si annulla per $z = a, 1/a$. Poiché $|a| < 1$ solo il residuo in $z = a$ contribuisce all'integrale. Applicando (3.10) si trova

$$\mathrm{Res}_a(1/f(z)) = \frac{i}{a^2 - 1}$$

e quindi

$$\mathbf{I} = \frac{2\pi}{1 - a^2}$$

Per calcolare altre classi di integrali definiti avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 3.6.3 *Sia $f(z)$ una funzione meromorfa nell'aperto*

$$U_\epsilon := \{z = x + iy : y > -\epsilon\}$$

per qualche $\epsilon > 0$ reale. Supponiamo che $f(z)$ possieda un numero finito di poli e che

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ y\geq 0}} zf(z) = 0$$

Sia $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, la semicirconferenza di raggio r di centro l'origine contenuta nel semipiano superiore. Allora

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z) = 0$$

Dim. Per l'ipotesi sui poli di f, l'integrale è ben definito per tutti gli $r \gg 0$. Sia $M(r) = \max\{|f(z)| : z \in \mathrm{Im}(\gamma_r)\}$. Allora:

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_{\gamma_r} f(z) \right| \leq \lim_{r\to\infty} M(r)r\pi = 0$$

e il lemma segue. $\diamond$

Integrali impropri di funzioni razionali - Consideriamo un integrale della forma:

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$$

dove $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ è una funzione razionale reale senza poli sull'asse reale. L'integrale $\mathbf{I}$ è detto un *integrale improprio*, e per definizione è dato da

$$\mathbf{I} = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} R(x)dx$$

Supponiamo che

$$\mathrm{gr}(Q) \geq \mathrm{gr}(P) + 2 \tag{3.13}$$

Per ogni $r > 0$ tale che $R(z)$ non abbia poli su γ_r abbiamo la seguente relazione

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\gamma_r} R(z) = 2\pi i \sum \mathrm{Res}_{z_j}(R(z))$$

dove la somma è estesa ai poli z_j di $R(z)$ contenuti nel semidisco aperto delimitato dal segmento $[-r, r]$ e da γ_r. Poiché $R(z)$ ha un numero finito di poli, per $r \gg 0$ la somma è estesa a tutti i poli contenuti nel semipiano superiore e quindi non dipende da r. Passando al limite per $r \to +\infty$ otteniamo:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}_z(R(z)) - \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} R(z)$$

Dal Lemma 3.6.3 segue che il limite a secondo membro esiste ed è uguale a zero. Quindi anche il limite a primo membro esiste e si ha

$$\mathbf{I} = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}_z(R(z))$$

Esempio 3.6.4 Calcoliamo l'integrale

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

La funzione integranda ha nel semipiano superiore l'unico polo $z = i$, con residuo uguale a

$$\mathrm{Res}_i \left(\frac{1}{1 + x^2} \right) = -\frac{i}{2}$$

Quindi $\mathbf{I} = -2\pi i \frac{i}{2} = \pi$.

Si osservi che l'integrale precedente si sarebbe potuto calcolare anche come conseguenza dell'identità $\frac{1}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x)'$.

Esempio 3.6.5 Consideriamo l'integrale

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$$

Il denominatore dell'integrando $f(x)$ ha le radici $-2 \pm 3i$, di cui solo $a = -2+3i$ è situata nel semipiano superiore. Si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_a(f(z)) &= \left[\frac{d}{dz}(z-a)^2 f(z)\right]_a \\ &= \left[\frac{d}{dz} z(z+2+3i)^{-2}\right]_a \\ &= \frac{i}{2 \cdot 27} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\mathbf{I} = 2\pi i \mathrm{Res}_a(f(z)) = -\frac{\pi}{27}$$

Terzo tipo - Consideriamo ora un integrale improprio della forma

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$$

dove $f(z)$ è meromorfa nell'aperto $U_\epsilon := \{z = x+iy : y > -\epsilon\}$ per qualche $\epsilon > 0$, ha un numero finito di poli nel semipiano superiore, e non ha poli sull'asse reale. L'integrale $\mathbf{I}$ è definito come

$$\mathbf{I} = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx$$

se il limite esiste. Ragionando come nel caso degli integrali impropri di funzioni razionali deduciamo che si ha, se $r \gg 0$:

$$\int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}_z(f(z)e^{iz}) - \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}$$

e quindi $\mathbf{I}$ esiste se e solo se esiste il limite dell'integrale a secondo membro per $r \to +\infty$.

Il seguente lemma garantisce l'esistenza del limite e quindi dell'integrale $\mathbf{I}$ sotto certe condizioni.

Lemma 3.6.6 *Sia $f(z)$ una funzione meromorfa nell'aperto*

$$U_\epsilon := \{z = x + iy : y > -\epsilon\}$$

per qualche $\epsilon > 0$ reale, con un numero finito di poli nel semipiano superiore, e supponiamo che

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ y\geq 0}} f(z) = 0 \tag{3.14}$$

Sia $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, la semicirconferenza di raggio r di centro l'origine contenuta nel semipiano superiore. Allora

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz} = 0$$

Dim. Se $r \gg 0$ abbiamo:

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\right| = \left|\int_0^\pi f(re^{it})e^{ir(\cos t + i\sin t)}ire^{it}dt\right|$$

$$\leq M(r)r\int_0^\pi e^{-r\sin t}dt \tag{3.15}$$

dove $M(r) = \max\{|f(re^{it})| : 0 \leq t \leq \pi\}$. Utilizzeremo le disuguaglianze elementari:

$$\begin{array}{ll} \sin t \geq \frac{2}{\pi}t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin t \geq -\frac{2}{\pi}t + 2, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{array}$$

che sostituite danno:

$$\int_0^\pi e^{-r\sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}rdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-r\sin t}dt$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2rt}{\pi}}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{r\left(\frac{2t}{\pi}-2\right)}dt$$

$$= -\frac{\pi}{2r}e^{\frac{-2rt}{\pi}}|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2r}e^{r\left(\frac{2t}{\pi}-2\right)}|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{r}(1 - e^{-r})$$

Sostituendo in (3.15) otteniamo:

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\right| \leq M(r)r\frac{\pi}{r}(1 - e^{-r}) \leq M(r)\pi$$

Poiché $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, la conclusione segue. $\diamond$

Come conseguenza otteniamo che, sotto le ipotesi precedenti, se la (3.14) è soddisfatta allora l'integrale **I** esiste e vale l'identità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}_z(f(z)e^{iz})$$

Capitolo 4

Successioni e serie di funzioni olomorfe o meromorfe

4.1 Convergenza uniforme e normale sui compatti

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Denotiamo con $\mathcal{C}(U)$ l'insieme di tutte le funzioni continue definite su U a valori complessi, e sia $H(U) \subset \mathcal{C}(U)$ il sottoinsieme delle funzioni olomorfe.

Una successione $\{f_n\}$ di funzioni $f_n \in \mathcal{C}(U)$ si dirà *uniformemente convergente sui compatti di* U se per ogni sottoinsieme compatto $K \subset U$ la successione delle restrizioni $\{f_{n|K}\}$ converge uniformemente. Poiché il limite uniforme di funzioni continue è continua, la funzione limite $f = \lim_n f_n$ di una successione uniformemente convergente sui compatti è tale che la sua restrizione $f_{|K}$ a qualsiasi compatto $K \subset U$ è continua. Ma allora, poiché ogni punto di U possiede un intorno aperto la cui chiusura è compatta e contenuta in U, segue che $f \in \mathcal{C}(U)$.

Una serie $\sum_n f_n$ di funzioni $f_n \in \mathcal{C}(U)$ si dirà *uniformemente convergente sui compatti di* U se la successione delle sue somme parziali è uniformemente convergente sui compatti. In tal caso la funzione somma $f = \sum_n f_n$ è continua, per quanto appena osservato.

Una serie $\sum_n f_n$ di funzioni $f_n \in \mathcal{C}(U)$ si dirà *normalmente convergente sui compatti di* U se per ogni sottoinsieme compatto $K \subset U$ la serie $\sum f_{n|K}$ converge normalmente. Ciò significa che per ogni sottoinsieme compatto

$K \subset U$ la serie $\sum f_{n|K}$ è maggiorata in modulo da una serie convergente di termini costanti positivi.

È evidente che se una serie è normalmente convergente sui compatti di U allora è anche uniformemente convergente sui compatti di U.

Lemma 4.1.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni $f_n \in \mathcal{C}(U)$ converga uniformemente sui compatti di U è che per ogni disco compatto $\Sigma \subset U$ la successione delle restrizioni $\{f_{n|\Sigma}\}$ converga uniformemente.*

Dim. La necessità è ovvia. La sufficienza segue immediatamente dal fatto che ogni sottoinsieme compatto $K \subset U$ può essere ricoperto da un numero finito di dischi compatti contenuti in U. $\diamond$

Teorema 4.1.1 *Se una successione di funzioni $f_n \in H(U)$ è uniformemente convergente sui compatti di U, la funzione limite f è olomorfa in U.*

Dim. Abbiamo già osservato che la funzione f è continua. D'altra parte, per ogni disco $D \subset U$, e per ogni arco chiuso γ contenuto in D, si ha

$$\int_\gamma f_n dz = 0$$

perché f_n è olomorfa. Dalla uniforme convergenza sui compatti, e dal fatto che l'immagine di γ è un compatto, segue che

$$\int_\gamma f dz = \lim_n \int_\gamma f_n dz = 0$$

Applicando il teorema di Morera 2.5.4 deduciamo che $f \in H(U)$. $\diamond$

Il seguente corollario è immediato.

Corollario 4.1.2 *La somma di una serie di funzioni $f_n \in H(U)$ normalmente convergente sui compatti di U è olomorfa.*

Teorema 4.1.3 *Se una successione di funzioni $f_n \in H(U)$ converge ad una funzione $f \in H(U)$ uniformemente sui compatti di U, allora la successione delle derivate $\{f'_n\}$ converge alla derivata $f' \in H(U)$ uniformemente sui compatti di U.*

Dim. Sia $z_0 \in U$ e sia $R > 0$ tale che il disco chiuso Σ_R di centro z_0 e raggio R sia contenuto in U. Allora per ogni n per ogni z tale che $|z - z_0| \leq R/2$, cioè $z \in \Sigma_{R/2}$, si ha:

$$f_n'(z) = \int_{C_R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

e

$$f'(z) = \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

Poiché C_R è compatto e f_n converge a f uniformemente sui compatti segue che

$$\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \lim_n \int_{C_R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

cioè $f'(z) = \lim_n f_n'(z)$. Quindi $\lim_n f_n' = f'$. Per verificare che la convergenza è uniforme sui compatti di U si osservi che, essendo $|z - \zeta| \geq R/2$ per ogni $\zeta \in C_R$ e $z \in \Sigma_{R/2}$, si ha

$$|f'(z) - f_n'(z)| \leq \int_{C_R} \left| \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| d\zeta \leq \frac{4}{R^2} \int_{C_R} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| d\zeta$$

e quindi $\lim_n f_n' = f'$ uniformemente in $\Sigma_{R/2}$. La conclusione ora segue dal Lemma 4.1.1 perché U può essere ricoperto dalla famiglia dei dischi compatti $\Sigma_{R/2}$ al variare di $z_0 \in U$. $\diamond$

Dimostriamo ora un risultato che risulta utile in diverse circostanze.

Proposizione 4.1.4 *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso, e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in U uniformemente convergente sui compatti di U. Supponiamo che $f_n(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$ e per ogni n. Allora la funzione $f = \lim_n f_n$ soddisfa $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$, oppure è identicamente nulla.*

Dim. Per il Teorema 4.1.1 f è olomorfa. Supponiamo che esista $z_0 \in U$ tale che $f(z_0) = 0$. Allora, se f non è identicamente nulla, z_0 è uno zero isolato di f perché U è connesso. Quindi, per il teorema dell'indicatore logaritmico (Teorema 3.5.6), si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz > 0$$

dove γ è una circonferenza di centro z_0 e raggio sufficientemente piccolo. Ma per il Teorema 4.1.3 quest'integrale è il limite degli integrali

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz$$

che sono nulli, ancora per il Teorema 3.5.6. Abbiamo quindi una contraddizione, e la Proposizione è dimostrata. $\diamond$

Osservazione 4.1.5 Il Teorema 4.1.1 descrive un fenomeno caratteristico delle funzioni di variabile complessa, che non ha un analogo nel caso di funzioni di variabile reale. Infatti un classico teorema di Weierstrass afferma che ogni funzione continua a valori reali definita in un insieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^N$ può essere ottenuta come limite di una successione di polinomi reali uniformemente convergente. Nel caso complesso invece ogni successione di polinomi uniformemente convergente sui compatti di un aperto $U \subset \mathbf{C}$ converge ad una funzione *olomorfa*, per il Teorema 4.1.1: quindi non è possibile approssimare uniformemente sui compatti di U una qualsiasi funzione *continua* su U mediante polinomi né funzioni olomorfe.

4.2 Serie di funzioni meromorfe

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $\{f_n\}$ una successione di funzioni meromorfe in U e $K \subset U$ un sottoinsieme compatto. diremo che la serie $\sum_n f_n$ *converge uniformemente in* K se è possibile rimuovere un numero finito di termini dalla serie in modo che le rimanenti funzioni non abbiano poli in K e costituiscano una serie uniformemente convergente in K.

Analogamente, diremo che la serie $\sum_n f_n$ *converge normalmente in* K se è possibile rimuovere un numero finito di termini dalla serie in modo che le rimanenti funzioni non abbiano poli in K e costituiscano una serie normalmente convergente in K.

È ovvio che una serie di funzioni meromorfe normalmente convergente in K è anche uniformemente convergente in K.

Consideriamo una serie $\sum_n f_n$ di funzioni meromorfe su U, uniformemente convergente sui compatti di U. Sia $V \subset U$ un sottoinsieme aperto la cui chiusura sia compatta e contenuta in U (un aperto siffatto si dice *relativamente compatto* in U). La somma della serie $\sum_n f_n$ in V è definita come la funzione meromorfa in V

$$\sum_{n\leq n_0} f_n + \sum_{n>n_0} f_n \tag{4.1}$$

dove n_0 è tale che la funzioni f_n, $n > n_0$, non abbiano poli in $\overline{V}$. Quindi il primo termine della (4.1) è una funzione meromorfa in V, perché è somma di un numero finito di funzioni meromorfe; il secondo termine è una funzione olomorfa in V perché è somma di una serie di funzioni olomorfe in V uniformemente convergente sui compatto di V. È un facile esercizio dimostrare che la funzione meromorfa (4.1) è indipendente dalla scelta di n_0.

Teorema 4.2.1 *Sia $\sum_n f_n$ una serie di funzioni meromorfe su un aperto U uniformemente (risp. normalmente) convergente sui compatti di U. Allora la somma della serie è una funzione meromorfa su U. Inoltre la serie $\sum_n f'_n$ delle derivate della serie assegnata converge uniformemente sui compatti di U e la sua somma è la derivata f' della somma f della serie assegnata.*

Dim. La somma della serie $\sum_n f_n$ è ben definita e meromorfa in ogni aperto relativamente compatto di V. Pertanto è ben definita e meromorfa in tutto U.

Sia $V \subset U$ un sottoinsieme aperto e relativamente compatto, e sia n_0 un intero scelto come in (4.1). Allora in V si ha:

$$f' = \sum_{n\leq n_0} f'_n + \left(\sum_{n>n_0} f_n\right)'$$

Inoltre la serie $\sum_{n>n_0} f_n$ può essere derivata termine a termine perché converge uniformemente sui compatti di V. Pertanto, per il Teorema 4.1.3 la serie delle derivate $\sum_{n>n_0} f'_n$ converge uniformemente sui compatti di V alla serie $(\sum_{n>n_0} f_n)'$. Ciò dimostra che la serie di funzioni meromorfe $\sum_n f'_n$ converge alla funzione meromorfa f' uniformemente sui compatti di V. Poiché ciò è vero per ogni aperto relativamente compatto $V \subset U$, deduciamo che $\sum_n f'_n$ converge alla funzione meromorfa f' uniformemente sui compatti di U. $\diamond$

4.3 Un esempio

Consideriamo la serie di funzioni meromorfe in $\mathbf{C}$:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{4.2}$$

Lemma 4.3.1 *La serie (4.2) converge normalmente sui compatti di* $\mathbf{C}$. *La sua somma è una funzione meromorfa* $f(z) \in M(\mathbf{C})$, *avente un polo di ordine* 2 *in tutti gli* $n \in \mathbf{Z}$ *con parte principale*

$$\frac{1}{(z-n)^2}$$

e nessun'altra singolarità. Inoltre f *è periodica di periodo* 1, *cioè soddisfa*

$$f(z+1) = f(z)$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$.

Dim. Poiché ogni sottoinsieme compatto di $\mathbf{C}$ è contenuto in un insieme della forma

$$S = S_{x_0,x_1} = \{z = x + iy : x_0 \le x \le x_1\}$$

è sufficiente dimostrare che la serie (4.2) converge normalmente in ogni insieme S. Poiché un tale S contiene solo un numero finito di interi n, solo un numero finito di termini della serie possiede poli in S. Inoltre per ogni $n < x_0$ si ha

$$\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| \le \frac{1}{(x_0-n)^2}$$

per ogni $z \in S$ e quindi la sottoserie

$$\sum_{n<x_0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge normalmente in S. D'altra parte si ha anche

$$\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| \le \frac{1}{(n-x_1)^2}$$

per ogni $n > x_1$ e per ogni $z \in S$. Quindi anche la sottoserie

$$\sum_{n>x_1} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge normalmente in S. Quindi, dopo aver rimosso un numero finito di termini dalla serie (4.2), otteniamo una serie di funzioni olomorfe in ogni punto di S e normalmente convergente in S. Quindi (4.2) è normalmente convergente sui compatti di $\mathbf{C}$.

La relazione

$$\sum_n \frac{1}{(z+1-n)^2} = \sum_{n'} \frac{1}{(z-n')^2}$$

ottenuta ponendo $n-1 = n'$ implica $f(z+1) = f(z)$. Infine è evidente che $f(z)$ non ha poli al di fuori dei numeri interi $n \in \mathbf{Z}$ e che per ogni $n \in \mathbf{Z}$ la funzione

$$f(z) - \frac{1}{(z-n)^2}$$

è olomorfa in n. $\diamond$

La funzione somma della serie (4.2) è descritta precisamente nel seguente modo.

Proposizione 4.3.1 *La somma $f(z)$ della serie (4.2) è uguale a*

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

Dim. Consideriamo la striscia $S_{0,1}$. Si ha

$$\lim_{|y|\to+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = 0$$

Poiché la serie (4.2) converge normalmente nella striscia $S_{0,1}$, il limite e la sommatoria si possono scambiare e deduciamo che in $S_{0,1}$ si ha anche

$$\lim_{|y|\to+\infty} f(z) = 0 \tag{4.3}$$

Utilizzando il fatto che $f(z)$ è periodica di periodo 1, deduciamo che la (4.3) sussiste in tutto $\mathbf{C}$.

Ora consideriamo la funzione $g(z) := \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$. Essa possiede le seguenti proprietà analoghe a quelle della $f(z)$:

(i) $g(z) \in M(\mathbf{C})$ ed è periodica di periodo 1.

(ii) I poli di $g(z)$ sono i numeri interi n, che sono poli doppi con parte principale $1/(z-n)^2$.

(iii)
$$\lim_{|y|\to+\infty} g(z) = 0$$

La proprietà (i) è ovvia. A causa della periodicità è sufficiente dimostrare la (ii) nell'origine, cioè dimostrare che l'origine è un polo doppio con parte principale $1/z^2$. Si ha, in un intorno di 0:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 &= \left(\frac{\pi}{\pi z - \frac{1}{6}\pi^3 z^3 + \cdots}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \cdots\right)^{-2} \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \cdots\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{3}\pi^2 z^2 + z^4(\cdots)\right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\cdots)\end{aligned} \tag{4.4}$$

e la (ii) segue. La relazione (iii) segue immediatamente dall'identità (1.12) di pag. 34.

Da questi fatti segue che la funzione $f(z) - g(z)$ è olomorfa in tutto $\mathbf{C}$ perché f e g hanno gli stessi poli con le stesse parti principali. Inoltre in ogni striscia S_{x_0,x_1} la funzione $f(z) - g(z)$ è limitata perché lo sono sia f che g, come segue dalla (4.3) e dalla (iii). Dalla periodicità di $f - g$ segue quindi che $f - g$ è limitata in $\mathbf{C}$. Applicando il teorema di Liouville (pag. 77) deduciamo che $f - g$ è costante. Infine, poiché $f - g$ tende a 0 al tendere di $|y|$ a $+\infty$, deduciamo che $f - g$ è identicamente nulla. ◇

Come applicazione dimostriamo la seguente identità, dovuta a Eulero:

Proposizione 4.3.2
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.5}$$

Dim. Dalla Proposizione 4.3.1 deduciamo che si ha:

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

ed il secondo membro è una funzione $h(z)$ olomorfa in un intorno di 0. Inoltre

$$h(0) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

D'altra parte la (4.4) implica che

$$\lim_{z \to 0} \left[\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 - \frac{1}{z^2} \right] = \frac{\pi^2}{3}$$

e la (4.5) segue. $\diamond$

Consideriamo ora la serie

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \tag{4.6}$$

il cui termine generale è uguale a $z/n(z-n)$. È facile dimostrare che questa serie converge normalmente sui compatti di $\mathbf{C}$ (si proceda come nella dimostrazione del Lemma 4.3.1). La sua somma è quindi una funzione $F(z)$ meromorfa in $\mathbf{C}$, i cui poli sono gli interi $z = n$, e sono poli semplici con residuo uguale a 1. Per il teorema 4.2.1 la derivata $F'(z)$ è la somma della serie delle derivate, cioè:

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 = \frac{d}{dz} \left(\frac{\pi}{\tan \pi z} \right)$$

e quindi

$$F(z) - \frac{\pi}{\tan \pi z} = c \tag{4.7}$$

una costante. D'altra parte dalla (4.6) segue che $F(-z) = -F(z)$; pertanto il primo membro della (4.7) è un funzione dispari e, essendo costante, è identicamente nulla.

La serie (4.6) può essere riordinata accorpando i termini relativi agli interi n e $-n$. Poiché

$$\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

otteniamo la relazione:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z} \tag{4.8}$$

4.4 Prodotti infiniti

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue in un aperto $U \subset \mathbf{C}$. Diremo che *il prodotto infinito*

$$\prod_n f_n(z)$$

converge normalmente in un sottoinsieme $K \subset U$ se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 1$ uniformemente in K.

(b) $\sum_n \ln f(z)$ converge normalmente in K.

La condizione (b) ha senso perché dalla (a) segue che $|f_n(z) - 1| < 1$ per $n \gg 0$ e quindi $\ln f_n(z)$ è una funzione ben definita in K.

Poniamo $f_n(z) = 1 + u_n(z)$. La (a) equivale alla condizione che la successione $\{u_n\}$ converga uniformemente a 0 in K. La (b) equivale alla condizione che la serie $\sum_n u_n$ converga normalmente in K. Riassumendo possiamo dire che le condizioni (a) e (b) sono equivalenti all'unica condizione:

(c) La serie

$$\sum_n u_n(z)$$

dove $u_n = f_n - 1$, converge normalmente in K.

Diremo che *il prodotto infinito*

$$\prod_n f_n(z)$$

converge normalmente nei compatti di U se converge normalmente in ogni sottoinsieme compatto $K \subset U$.

Teorema 4.4.1 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in un aperto $U \subset \mathbf{C}$. Supponiamo che*

$$\prod_n f_n(z)$$

converga normalmente nei compatti di U. Allora la funzione

$$f(z) = \prod_n f_n(z) := \lim_{n\to\infty} f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z)$$

è olomorfa in U. Inoltre per ogni $p > 0$ si ha:

$$f(z) = f_1(z) \cdots f_p(z) \prod_{n>p} f_n(z) \tag{4.9}$$

L'insieme degli zeri di f coincide con l'unione degli zeri delle funzioni $f_n(z)$. L'ordine di uno zero di f è uguale alla somma degli ordini che esso ha per ciascuno dei fattori.

Dim. f è olomorfa perché è limite uniforme sui compatti di U dei prodotti parziali finiti, che sono funzioni olomorfe. La formula (4.9) è ovvia in ogni sottoinsieme compatto di U e quindi è vera per ogni $z \in U$. Poiché la successione $\{u_n\}$ converge a 0 uniformemente sui compatti di U, la funzione f_n non ha zeri in U quando $n \gg 0$. Quindi l'ultima affermazione è ovvia. $\diamond$

Teorema 4.4.2 *Sotto le stesse ipotesi del Teorema 4.4.1, la serie di funzioni meromorfe*

$$\sum_n \frac{f_n'}{f_n}$$

converge normalmente nei compatti di U, e ha per somma la derivata logaritmica f'/f.

Dim. Sia $K \subset U$ un compatto. La funzione

$$g_p = e^{\sum_{n>p} \ln f_n}$$

è ben definita e olomorfa in K per $p \gg 0$. Per la (4.9) abbiamo:

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n\leq p} \frac{f_n'}{f_n} + \frac{g_p'}{g_p} \tag{4.10}$$

D'altra parte:

$$\frac{g_p'}{g_p} = \sum_{n>p} \frac{f_n'}{f_n} \tag{4.11}$$

dove la serie a secondo membro converge uniformemente sui compatti di U: infatti la serie $\sum_{n>p} \ln f_n$ dei logaritmi converge uniformemente sui compatti a $\ln g_p$, cosicché la serie delle derivate di questi logaritmi converge uniformemente sui compatti alla derivata g_p'/g_p. Confrontando (4.10) e (4.11) deduciamo che in K si ha:

$$\frac{f'}{f} = \sum_n \frac{f_n'}{f_n}$$

e che la convergenza è normale sui compatti di K. Poiché ciò è vero per ogni compatto $K \subset U$ il teorema segue. $\diamond$

4.5 L'espansione di $\sin \pi z$ come prodotto infinito

Consideriamo il prodotto infinito

$$f(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \tag{4.12}$$

Dalla convergenza della serie numerica $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ segue che la serie $\sum_{n\geq 1} z^2/n^2$ converge normalmente sui compatti di $\mathbf{C}$, e quindi il prodotto infinito (4.12) converge normalmente sui compatti di $\mathbf{C}$. Deduciamo che $f(z)$ è una funzione olomorfa in tutto $\mathbf{C}$, i cui zeri sono i numeri interi $z = n$, e sono zeri semplici. Applicando il Teorema (4.4.2), possiamo differenziare logaritmicamente termine a termine ottenendo una serie di funzioni meromorfe che converge normalmente sui compatti di $\mathbf{C}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

Abbiamo visto (pag. 117) che la somma di questa serie è

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

dove abbiamo posto $g(z) = \sin \pi z$. Pertanto $f'/f = g'/g$, cosicché

$$\frac{f(z)}{z} = c \frac{\sin \pi z}{z}$$

dove c è una costante. Per la (4.12) si ha

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$$

e poiché

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

deduciamo che $c = \frac{1}{\pi}$. Quindi abbiamo la formula:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{4.13}$$

Ponendo $z = \frac{1}{2}$ otteniamo la **Formula di Wallis**:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n \geq 1} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots}$$

J. Wallis (1616–1703) ottenne questa identità molto tempo prima che il calcolo integrale fosse stato creato. La formula è notevole perchè fornisce un'espressione di π come un limite in cui non compaiono numeri irrazionali. Wallis è anche noto per aver introdotto per primo il simbolo ∞.

Capitolo 5

Funzioni ellittiche

5.1 Funzioni periodiche

Una funzione $f(z)$ meromorfa in $\mathbf{C}$ si dice *periodica* se esiste $\omega \in \mathbf{C}$, $\omega \neq 0$, tale che

$$f(z+\omega) = f(z)$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$. Il numero ω si dice un *periodo* di f. Dalla definizione segue che si ha anche $(f(z+k\omega) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbf{C}$ e $k \in \mathbf{Z}$, e quindi anche $k\omega$ è un periodo di f se lo è ω.

Se f è costante allora ogni $\omega \in \mathbf{C}$ è periodo di f. Esempi di funzioni periodiche non costanti sono e^z e $\sin z$, di periodo $2\pi i$ e 2π rispettivamente.

Teorema 5.1.1 (Jacobi) *Una funzione meromorfa non costante può essere*

(i) semplicemente periodica*, cioè tutti i suoi periodi sono multipli interi di uno di essi ω_1.*

(ii) doppiamente periodica*, cioè tutti i suoi periodi sono della forma*

$$\omega = h\omega_1 + k\omega_2, \qquad h, k \in \mathbb{Z}$$

dove $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ sono due periodi linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$.

e non ci sono altre possibilità. In particolare, una funzione meromorfa non può avere più di due periodi linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$.

Dim. Osserviamo che

a) *Si ha*

$$\inf\{|\omega| : \omega \neq 0 \text{ periodo di } f\} : \delta > 0$$

Se infatti si avesse $\delta = 0$ allora per ogni $\epsilon > 0$ esisterebbe un periodo $\omega_\epsilon \neq 0$ tale che $|\omega_\epsilon| < \epsilon$. Da ciò seguirebbe l'esistenza di una successione di periodi $\{\omega_n\}$ tale che $\lim_n \omega_n = 0$. Se $u_0 \in \mathbf{C}$ non è un polo di f allora

$$f(u_0) = f(u_0 + \omega_n)$$

e quindi $f(z) - f(u_0)$ avrebbe gli infiniti zeri $u_0 + \omega_n$, con u_0 come punto di accumulazione. Seguirebbe che $f(z)$ è costante, il che è contro l'ipotesi.

Dimostriamo ora che

b) *I periodi di* $f(z)$ *non hanno punti di accumulazione in* $\mathbf{C}$.

Se ω_0 fosse un punto di accumulazione di periodi, allora per ogni $\epsilon > 0$ esisterebbero due periodi distinti ω_1, ω_2 nel disco $D(\omega_0, \epsilon)$. Quindi, essendo $|\omega_1 - \omega_2| < 2\epsilon$ ed $\omega_1 - \omega_2$ un periodo, $f(z)$ avrebbe periodi di modulo arbitrariamente piccolo, e ciò contraddice a).

Da a) e b) segue che il valore assoluto dei periodi non nulli di f assume un minimo $\delta > 0$. Sia dunque ω_1 un periodo tale $|\omega_1| = \delta$. Ogni $n\omega_1$, $n \in \mathbb{Z}$, è un periodo. Viceversa, sia ω un qualsiasi periodo tale che ω/ω_1 sia reale, e sia $n \in \mathbb{Z}$ l'intero definito dalla condizione

$$0 \leq \frac{\omega}{\omega_1} - n < 1$$

Allora $\omega_0 := \omega - n\omega_1$ è un periodo tale che $|\omega_0| < |\omega_1|$, e quindi $\omega_0 = 0$. Ne deduciamo che $\omega = n\omega_1$. Quindi ogni periodo ω tale che ω/ω_1 sia reale è un multiplo intero di ω_1. Se $f(z)$ non ha altri periodi allora siamo nel caso (i).

Supponiamo che esista un periodo ω tale che ω/ω_1 non sia reale, e denotiamo con ω_2 un tale periodo con valore assoluto minimo. Sia $\tau = \omega_2/\omega_1$. Allora $|\tau| \geq 1$ e, salvo a scambiare ω_2 con $-\omega_2$, anche $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Ogni $h\omega_1 + k\omega_2$, $h, k \in \mathbb{Z}$, è un periodo di f. Facciamo vedere che viceversa ogni periodo ω è di questa forma.

Possiamo scrivere $\omega = x\omega_1 + y\omega_2$, per opportuni $x, y \in \mathbf{R}$. Si ha:

$$x = h + a, \qquad y = k + b$$

dove $h, k \in \mathbb{Z}$ e $-1/2 \leq a, b \leq 1/2$. Allora

$$\omega_0 := \omega - h\omega_1 - k\omega_2 = a\omega_1 + b\omega_2$$

è un periodo e si ha:

$$\left|\frac{\omega_0}{\omega_2}\right| = \left|\frac{a}{\tau} + b\right| \leq \frac{|a|}{|\tau|} + |b| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

L'uguaglianza può valere solo se $a/\tau \in \mathbf{R}$. Poiché ciò è falso, si ha $|\omega_0| < |\omega_2|$, e quindi ω_0/ω_1 è reale, cioè $b = 0$. D'altra parte, poiché $|a| \leq 1/2$, deve anche essere $|\omega_0| < |\omega_1|$, e quindi $\omega_0 = 0$. Quindi $\omega = h\omega_1 + k\omega_2$, e siamo nel caso (ii). $\diamond$

Sia $f(z)$ semplicemente periodica con insieme dei periodi

$$\Omega_f = \{n\omega_1 : n \in \mathbb{Z}\}$$

Sostituendo z con $\omega_1 z$, possiamo supporre che $\Omega_f = \mathbb{Z}$, cosicché si ha

$$f(z+n) = f(z)$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Ad esempio la funzione $z \mapsto e^z$ ha $\{2n\pi i : n \in \mathbb{Z}\}$ come insieme dei periodi, mentre la funzione

$$\zeta = \epsilon(z) = e^{2\pi i z}$$

ha $\mathbb{Z}$ come insieme dei periodi. Si noti che

$$\epsilon^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \zeta$$

ha infinite determinazioni che differiscono per un intero, per ogni $\zeta \neq 0$.

Se $f(z)$ è una funzione periodica con insieme dei periodi $\mathbb{Z}$ allora, a causa della periodicità, la funzione

$$\phi(\zeta) := (f \circ \epsilon^{-1})(\zeta) = f\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \zeta\right)$$

è ben definita e meromorfa in $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Viceversa, data una funzione $\phi(\zeta)$ meromorfa in $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, la funzione

$$f(z) = (\phi \circ \epsilon)(z) = \phi(e^{2\pi i z}) \tag{5.1}$$

è una funzione semplicemente periodica con insieme dei periodi $\mathbb{Z}$. Quindi le funzioni $f(z)$ meromorfe e periodiche di insieme dei periodi $\mathbb{Z}$ sono tutte e sole quelle della forma (5.1) per qualche $\phi(\zeta) \in M(\mathbf{C}\backslash\{0\})$. I poli di $\phi(\zeta)$ sono in corrispondenza biunivoca con le classi di congruenza modulo $\mathbb{Z}$ di poli di $f(z)$.

Definizione 5.1.2 *Una funzione meromorfa in* $\mathbf{C}$ *e doppiamente periodica si dice una* funzione ellittica.

Sia $f(z)$ una funzione ellittica. Due periodi $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ tali che ogni altro periodo di $f(z)$ si possa esprimere come loro combinazione lineare a coefficienti interi, si dicono *periodi primitivi* di $f(z)$. Si noti che la coppia di periodi primitivi non è univocamente determinata, perché ad esempio $-\omega_1, -\omega_2$ sono ancora periodi primitivi. Salvo scambiare tra loro ω_1 e ω_2, e a cambiare di segno uno di essi, si può sempre fare in modo che si abbia

$$\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0, \qquad |\omega_2/\omega_1| \geq 1$$

L'insieme dei periodi di una funzione ellittica è dunque un sottogruppo di $\mathbf{C}$ libero di rango 2 che si dice un *reticolo* e si denota con

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

Fissato un qualsiasi $z_0 \in \mathbf{C}$, l'insieme Π dei numeri complessi della forma

$$z_0 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2$$

al variare di $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$, si dice il *parallelogramma fondamentale* di primo vertice z_0.

Dato un reticolo Λ, l'insieme delle funzioni ellittiche il cui reticolo dei periodi coincide con, o contiene, Λ, si denota con $E(\Lambda)$ ed i suoi elementi si dicono *funzioni ellittiche relative a* Λ. Le funzioni costanti sono ellittiche relative a qualunque Λ. Si osservi che se $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ allora $E(\Lambda_2) \subset E(\Lambda_1)$. È immediato verificare che $E(\Lambda)$ costituisce un sottocampo di $M(\mathbf{C})$.

Proposizione 5.1.3 *Sia* $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ *un reticolo.*

(i) *Se* $f \in E(\Lambda)$ *allora anche la sua derivata* $f' \in E(\Lambda)$.

(ii) *Le uniche funzioni olomorfe contenute in* $E(\Lambda)$ *sono le costanti.*

Dim. (i) è ovvia.

(ii) Se $f(z) \in E(\Lambda)$ è olomorfa, allora è limitata in un parallelogramma fondamentale. Dalla periodicità segue che è limitata in tutto $\mathbf{C}$, e quindi è costante per il teorema di Liouville. $\diamond$

Teorema 5.1.4 (Abel) *Se $f \in E(\Lambda)$ non è costante allora il numero di zeri di f contenuto in un parallelogramma fondamentale Π coincide con il numero dei suoi poli nello stesso parallelogramma, se ognuno di essi viene contato con il rispettivo ordine, e purché nessuno zero né polo sia sulla frontiera del parallelogramma.*

Se $z_1, \ldots, z_r \in \Pi$ sono gli zeri e $p_1, \ldots, p_r \in \Pi$ sono i poli, ognuno di essi essendo ripetuto secondo il suo ordine, allora

$$\sum_j z_j \equiv \sum_j p_j \qquad (mod\ \Lambda)$$

Dim. Sia $z_0 \in \mathbf{C}$ tale che la frontiera del parallelogramma fondamentale Π di primo vertice z_0 non contenga né zeri né poli di f. Per il teorema dell'indicatore logaritmico è sufficiente dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{f'}{f} = 0$$

dove $\partial\Pi$ denota la curva costituita dalla frontiera di Π percorsa in senso antiorario. Poniamo

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \frac{f'}{f}$$

Per la 5.1.3(i), $\Phi \in E(\Lambda)$. Si ha:

$$\int_{\partial\Pi} \Phi = \int_0^1 [\Phi(z_0 + t\omega_1) - \Phi(z_0 + \omega_2 + t\omega_1)]dt$$
$$+ \int_0^1 [\Phi(z_0 + \omega_1 + t\omega_2) - \Phi(z_0 + t\omega_2)]dt$$

Per la periodicità di Φ entrambi gli addendi sono nulli, e la prima parte segue.

Consideriamo l'integrale

$$\int_{\partial\Pi} \Phi(z) z dz \tag{5.2}$$

Si osservi che l'integrando non è una funzione ellittica e che non è restrittivo supporre $0 \notin \Pi$. L'integrazione lungo due lati opposti di Π dà:

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega_1} \Phi(z) z dz + \int_{z_0+\omega_1+\omega_2}^{z_0+\omega_2} \Phi(z) z dz$$

$$= \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} \Phi(z)zdz + \int_{z_0+\omega_1}^{z_0} \Phi(z+\omega_2)(z+\omega_2)dz = -\omega_2 \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} \Phi(z)dz$$

Poiché $\Phi(z_0) = \Phi(z_0+\omega_1)$, si ha:

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega_1} \Phi(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0+\omega_1} d[\ln f(z)] = n$$

per qualche $n \in \mathbb{Z}$. Quindi il contributo all'integrale (5.2) dato dai due lati opposti considerati è $-n\omega_2$. Analogamente, gli altri due lati danno il contributo $-m\omega_1$, $m \in \mathbb{Z}$. Quindi si ha:

$$\int_{\partial\Pi} \Phi(z)zdz \equiv 0 \qquad (\text{mod } \Lambda)$$

D'altra parte, questo stesso integrale può essere calcolato utilizzando il teorema dei residui ed osservando che l'integrando ha residuo μz per ogni zero z di ordine μ in Π, e $-\nu p$ per ogni polo di ordine ν in Π (stiamo supponendo $0 \notin \Pi$). Da ciò segue la seconda parte del teorema. $\diamond$

La teoria delle funzioni ellittiche non avrebbe interesse se, per un dato reticolo Λ, $E(\Lambda)$ consistesse solo di funzioni costanti. L'esistenza di funzioni ellittiche non costanti per ogni reticolo Λ sarà dimostrata nel prossimo paragrafo.

5.2 La funzione $\wp$ di Weierstrass

Vogliamo dimostrare che per ogni reticolo Λ esistono funzioni ellittiche non costanti in $E(\Lambda)$. Fissiamo dunque un reticolo qualsiasi $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$, con $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$.

Lemma 5.2.1 *La serie*

$$\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{|\omega|^r}$$

converge per ogni $r \geq 3$.

Dim. Per ogni $n \geq 1$ denotiamo con P_n l'insieme degli $\omega \in \Lambda$ della forma

$$\omega = h\omega_1 + k\omega_2$$

con $n \in \{\pm h, \pm k\}$, $|h|, |k| \leq n$. Si verifica immediatamente che: $P_n \cap P_m = \emptyset$ se $n \neq m$, e

$$\Lambda \backslash \{0\} = \bigcup_n P_n$$

Inoltre P_n consiste di $8n$ elementi, ognuno dei quali ha modulo $\geq cn$, dove $c = \min_{\omega \in P_1} |\omega|$. Quindi:

$$\sum_{\omega \in P_n} \frac{1}{|\omega|^r} \leq \frac{8n}{c^r n^r}$$

Sommando rispetto ad n troviamo:

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^r} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\omega \in P_n} \frac{1}{|\omega|^r} \right) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{8}{c^r n^{r-1}}$$

e questa serie converge per $r \geq 3$. La conclusione segue. $\diamond$

Proposizione 5.2.1 *La serie di funzioni meromorfe:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \backslash \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

converge normalmente in ogni disco $D_0(R)$, $R > 0$, e quindi ha per somma una funzione meromorfa in tutto il piano.

Dim. Fissato $R > 0$, si ha $|\omega| \geq R$ per tutti gli $\omega \in \Lambda$ eccettuato al più un numero finito. Quindi per tutti i termini della serie, eccettuato al più un numero finito, si ha, se $|z| < R$:

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{2\omega z - z^2}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| =$$

$$= \frac{\left| z \left(2 - \frac{z}{\omega} \right) \right|}{|\omega^3| \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right|^2} \leq \frac{R \frac{3}{2}}{|\omega^3| \frac{1}{4}} = \frac{6R}{|\omega^3|}$$

Dal lemma 5.2.1 segue che la serie $\wp(z)$ converge normalmente nel disco $D_0(R)$. $\diamond$

La funzione meromorfa in $\mathbf{C}$ somma della serie $\wp(z)$ è detta *funzione $\wp$ di Weierstrass* e denotata con lo stesso simbolo. Ovviamente $\wp(z)$ dipende dalla scelta del reticolo Λ. Le sue principali proprietà sono date dalla seguente:

Proposizione 5.2.2 **(i)** *$\wp(z) \in E(\Lambda)$, cioè $\wp(z)$ è una funzione ellittica relativa a Λ.*

(ii) *I poli di $\wp(z)$ sono esattamente i punti di Λ, ed essi sono poli di ordine 2 con parte principale*

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}$$

(iii) *$\wp(-z) = \wp(z)$ per ogni $z \in \mathbf{C}$, cioè $\wp(z)$ è una funzione pari.*

(iv) *La derivata $\wp'(z)$ appartiene a $E(\Lambda)$, e soddisfa:*

$$\wp'(-z) = -\wp'(z)$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$, cioè è una funzione dispari; inoltre ha per poli tutti e soli i punti di Λ, che sono poli di ordine 3 con residuo nullo.

Dim. (iii) Si ha:

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(-z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

e sostituendo ω al posto di $-\omega$ si riottiene la serie originaria.

(iv) La convergenza normale implica che la serie $\wp(z)$ può essere derivata termine a termine. Quindi:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

La conclusione segue immediatamente.

(ii) Ogni $z \notin \Lambda$ è punto di regolarità di ogni termine della serie $\wp(z)$, e quindi è punto di regolarità della funzione $\wp(z)$. Inoltre dalla definizione segue che per ogni $\omega \in \Lambda$ si ha, in un intorno di ω:

$$\wp(z) = \frac{1}{(z-\omega)^2} + f(z)$$

dove $f(z)$ è olomorfa. La conclusione segue.

(i) Dalla periodicità di $\wp'(z)$ si deduce che esiste una costante C tale che

$$\wp(z + \omega_1) = \wp(z) + C$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$. Prendendo $z = -\frac{\omega_1}{2}$ (che non è un polo di $\wp$) si ottiene:

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + C$$

e poiché $\wp$ è pari, si deduce che $C = 0$. Argomentando in modo simile per ω_2 si conclude. $\diamond$

Per poter proseguire lo studio delle funzioni $\wp(u)$ e $\wp'(u)$ è necessario considerare i loro sviluppi in serie di Laurent. Allo scopo introduciamo le cosiddette *serie di Eisenstein*. Esse sono definite per ogni $r \geq 3$ come:

$$G_r = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^r}$$

Ovviamente $G_r = G_r(\Lambda)$ dipende dal reticolo Λ. Per il Lemma 5.2.1 la serie G_r converge assolutamente per ogni $r \geq 3$. Denotando con lo stesso simbolo la sua somma osserviamo che si ha

$$G_r = 0$$

per ogni r dispari perché

$$-1/\omega^r = 1/(-\omega)^r$$

e quindi i termini corrispondenti ad ω e a $-\omega$ si cancellano. Ciò posto si ha:

Lemma 5.2.2 *Gli sviluppi di Laurent di $\wp(u)$ e di $\wp'(u)$ nell'origine sono*

$$\begin{aligned}\wp(u) &= u^{-2} + \textstyle\sum_{j\geq 2}(2j-1)G_{2j}u^{2j-2} \\ \wp'(u) &= -2u^{-3} + \textstyle\sum_{j\geq 1} 2j(2j+1)G_{2j+2}u^{2j-1}\end{aligned}$$

Dim. Lo sviluppo di $\wp'(u)$ segue da quello di $\wp(u)$ derivandolo termine a termine. Per $\wp(u)$ osserviamo che si ha:

$$(u-\omega)^{-2} = \omega^{-2}[1 + \sum_{j\geq 1}(j+1)\frac{u^j}{\omega^j}]$$

e quindi

$$\wp(u) - u^{-2} = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} [(u-\omega)^{-2} - \omega^{-2}] =$$

$$= \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \sum_{j \geq 1} (j+1) \frac{u^j}{\omega^{j+2}} = \sum_{j \geq 1} (j+1) G_{j+2} u^j$$

che è l'espressione cercata, tenuto conto del fatto che $G_r = 0$ per r dispari. $\diamond$

Dimostriamo ora il seguente importante risultato:

Teorema 5.2.3 *Le funzioni $\wp(u)$ e $\wp'(u)$ soddisfano l'identità*

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3 \tag{5.3}$$

dove abbiamo posto:

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6$$

Dim. Utilizzando il Lemma 5.2.2 si calcola che primo e secondo membro della (5.3), che hanno un polo di ordine 6 nell'origine, hanno uguali i termini in $u^{-6}, \ldots, u^{-1}$ ed il termine costante. Quindi la loro differenza è una funzione ellittica olomorfa che si annulla nell'origine, cioè è la funzione identicamente nulla. $\diamond$

Il teorema 5.2.3 afferma che al variare di $u \in \mathbf{C}$ il punto $(\wp(u), \wp'(u))$ varia sulla curva piana $\mathcal{C}$ di equazione:

$$W^2 = 4Z^3 - g_2Z - g_3 \tag{5.4}$$

Osserviamo che il *secondo membro della (5.4), cioè il polinomio*

$$4Z^3 - g_2Z - g_3(3) \tag{5.5}$$

possiede 3 *radici distinte*, che sono

$$e_1 = \wp(\omega_1/2), \quad e_2 = \wp(\omega_2/2), \quad e_3 = \wp((\omega_1 + \omega_2)/2)$$

Sia infatti $\omega \in \{\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2\}$. Poiché $-\omega \equiv \omega \pmod{\Lambda}$ si ha

$$\wp'(\omega) = \wp'(-\omega) = -\wp'(\omega)$$

cioè $\wp'(\omega) = 0$. Dalla (5.3) segue che e_1, e_2, e_3 sono radici di (5.5). Poiché $\wp'(\omega) = 0$ segue che l'equazione

$$\wp(u) - \wp(\omega) = 0$$

ha in ω una radice doppia. Sia $0 \neq z_0 \in \mathbf{C}$ tale che $|z_0| < \epsilon$, con $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, Nel parallelogramma fondamentale Π di primo vertice z_0 è contenuto un solo polo di $\wp$, che ha ordine 2. Dalla Proposizione 5.1.3(ii) segue che in nessun altro punto σ di Π si ha $\wp(\sigma) = \wp(\omega)$. Quindi le tre radici e_1, e_2, e_3 sono distinte.

Questo fatto significa che, come è immediato verificare, *la curva $\mathcal{C}$ è nonsingolare*, anche all'infinito.

Se (z, w) è un punto di $\mathcal{C}$ diverso da $(e_i, 0)$, cioè tale che $w \neq 0$, allora si ha $\wp(u) = \wp(-u) = z$ per qualche $u \not\equiv -u \pmod{\Lambda}$ perché $w \neq 0$. D'altra parte essendo $\wp'(-u) = -\wp'(u)$ deduciamo che *per ogni punto (z, w) della curva $\mathcal{C}$ esiste un unico u (mod Λ) tale che*

$$(z, w) = (\wp(u), \wp'(u))$$

Bibliografia

[1] E. Giusti: *Analisi Matematica 1,* Bollati Boringhieri (1985).