corso AC1 - a.a. 07/08

Appello B (3/7/08)

1) Calcolare lo sviluppo in serie in $z_0 = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{1+z}$$

2) Determinare il disco di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{n} + in\right)(z+1+i)^n$$

3) Calcolare l'integrale:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{9}{10}} \frac{z^2}{(2z^2-1)(z-i)}dz$$

4) Siano

$$f(z) = \sin z, \quad g(z) = \sin\frac{1}{z}$$

Per ognuna delle funzioni: $\frac{f(z)}{g(z)}$, $\frac{g(z)}{f(z)}$ stabilire se ha una singolarità isolata in $z_0 = 0$ e, in caso affermativo, che tipo di singolarità e calcolarne il residuo.

Soluzioni

1) $f(z) = \sum_{N\geq 0}(-1)^N \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\right)$

2) $|z+1+i| < 1$.

3) $\mathbf{I} = \frac{1}{6}$. $\mathrm{Res}_{\infty} = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Res}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4(\frac{\sqrt{2}}{2}-i)}$, $\mathrm{Res}_{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4(\frac{\sqrt{2}}{2}+i)}$

4) f/g non ha una singolarità isolata, mentre g/f ha una singolarità essenziale.