

Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2005/2006
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 7
Giovedì 4 Maggio 2006

1. Calcolare i residui delle seguenti funzioni nei punti indicati a fianco:

- (a) $\frac{1}{\sin z}$, $z_0 = \pi$
- (b) $\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$, $z_0 = 1$
- (c) $\frac{1}{z^2+1}$, $z_0 = i$
- (d) $\frac{e^z}{z^{100}}$, $z_0 = 0$
- (e) $\frac{1}{z^n-1}$, $z_0 = 1$

2. Sia $U := \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$. Fissare una determinazione della funzione $z^{1/3}$ su U scegliendo l'argomento tra $-\pi/2$ e $3\pi/2$. Calcolare $1^{1/3}$ e $(-1)^{1/3}$. Quali delle seguenti uguaglianze è vera? Dove non è verificata l'altra?

- (a) $(-1)^{2/3} = ((-1)^2)^{1/3} = 1^{1/3} = 1$
- (b) $(-1)^{2/3} = ((-1)^{1/3})^2 = (e^{\pi i/3})^2 = (-1/2) + i(\sqrt{3}/2)$

3. Sia γ il bordo del rettangolo di vertici $0, 4i, 10 + 4i, 10$ percorso una volta in senso antiorario. Usando il teorema dei residui, calcolare i seguenti integrali:

- (a) $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2-3z+5} dz$
- (b) $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+z+1} dz$
- (c) $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2-z+1} dz$

4. Trovare i poli e calcolare i residui, nei poli, delle seguenti funzioni:

- (a) $\frac{1}{\sin z}$
- (b) $\frac{1}{1-e^z}$
- (c) $\frac{\cos(e^{-z})}{z^2}$

5. Calcolare, usando il teorema dei residui, $\int_{|z|=1} (z + 1/z)^{2n} dz/z$

6. Sia f una funzione meromorfa su \mathbb{C} tale che $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. Dimostrare che f è una funzione razionale. (Non potete dare per scontato che f ha solo un numero finito di poli.)

7. (Una funzione meromorfa f si dice periodica di periodo w se $f(z+w) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Sia f una funzione meromorfa e si supponga f periodica di periodi w_1, w_2, w_3 linearmente indipendenti su \mathbb{Q} . Dimostrare che f è costante. (Sugg.: provare che esistono combinazioni lineari intere di w_1, w_2, w_3 arbitrariamente piccole in valore assoluto.)