Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2005/2006
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 2
Giovedì 16 Marzo 2006

1. Trovare i termini di ordine ≤ 3 nell'espansione in serie di potenze, in $z = 1$, delle seguenti funzioni e dire se sono isomorfismi analitici locali in un intorno di $z = 1$:
   (a) $f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$
   (b) $f(z) = \frac{e^z}{z}$
   (c) $f(z) = \frac{z-2}{(z+3)(z+2)}$

2. Determinare quali tra le seguenti funzioni sono isomorfismi analitici locali nel punto assegnato. Giustificare la risposta.
   (a) $f(z) = e^z$ in $z = 0$
   (b) $f(z) = \sin(z^2)$ in $z = 0$
   (c) $f(z) = \frac{z-1}{z-2}$ in $z = 1$
   (d) $f(z) = (\sin(z))^2$ in $z = 0$
   (e) $f(z) = \cos(z)$ in $z = \pi$

3. Calcolare tutti i possibili valori delle espressioni sottostanti:
   $\log(1)$, $\log(-2)$, $\log(i)$, i^i, i^π, $1^{\frac{1}{2}}$

4. Trovare il valore di:
   (a) $\sin(i)$
   (b) $\cos(i)$
   (c) $\tan((1 + i)\pi)$
   (d) $e^{\frac{3}{4}\pi i}$

5. Sia f una funzione analitica su $D(0, 1)$. Sia Z l'insieme degli zeri di f. Se Z è un insieme di cardinalità infinita possiamo concludere che $f = 0$ su $D(0, 1)$? E se $Z \subset D(0, \alpha)$ con $\alpha < 1$?

6. Dimostrare che la funzione $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ è un isomorfismo analitico (globale) tra l'aperto $H = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ e $f(H)$. Dimostrare che $f(H) = D(0, 1)$. Utilizzando la funzione f trovare, infine, un isomorfismo tra $K = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 0,\ Im(z) > 0\}$ e $D(0, 1)$.

7. Sia $\Omega := D(0, 1) - \{0\}$. Dare un esempio di funzione f analitica su Ω t.c. $f(1/n) = (-1)^n/n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$. E' possibile trovare un esempio analogo se $\Omega := D(0, 1)$?

8. Sia f una funzione analitica che manda $D(0, 1)$ in se stesso e t.c. $f(0) = 0$. Dimostrare che per ogni $z \in D(0, 1)$ si ha $|f(z)| \leq |z|$.