Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Tutorato 2 - 28 febbraio 2006

1. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazione diofantee:

(1) $15X + 7Y = 111$

(2) $12X + 50Y = 1$

(3) $40X + 63Y = 121$.

2. Data l' equazione diofantea

$$(3\lambda + 1)X + 5Y = 10,$$

(a) determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Z}$, l'equazione assegnata è risolubile;

(b) per il più piccolo valore positivo di λ per il quale l'equazione assegnata è risolubile, scrivere esplicitamente le soluzioni.

3. Data l'equazione diofantea:

$$(2\lambda + 3)X + 5Y + \lambda Z = 4,$$

(a) determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Z}$, l'equazione assegnata è risolubile;

(b) per il più piccolo valore positivo di λ per il quale l'equazione assegnata è risolubile, scrivere esplicitamente le soluzioni.

4. Siano m ed n interi positivi relativamente primi e siano $S^* := \{x_1, x_2, \ldots, x_{\phi(n)}\}$ e $T^* := \{y_1, y_2, \ldots, y_{\phi(m)}\}$ rispettivamente un sistema ridotto di residui (mod n) ed un sistema ridotto di residui (mod m). Verificare che:

$$V^* := \{mx_i + ny_j, 1 \le i \le \phi(n), 1 \le j \le \phi(m)\}$$

è un sistema ridotto di residui (mod mn).

5. Mostrare con un controesempio che $\phi(n)$ numeri distinti (mod n) non costituiscono necessariamente un sistema ridotto di residui (mod n).

6. Dimostrare che l'equazione diofantea $aX + cY = b$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$) quando è risolubile ha una soluzione (x_0, y_0) con $0 \le x_0 < |c|$.

7. Verificare che:

(1) il quadrato di ogni intero è congruo a 0 oppure a 1 (mod 4).

(2) Il quadrato di ogni intero è congruo a 0 oppure a 1 oppure a 4 (mod 8).

(3) 4444444447 non è somma di due quadrati.

(4) 8888888895 non è somma di tre quadrati.

8. Trovare tutte le soluzioni della congruenza:

$$4X + 3Y \equiv 5 \pmod{6}.$$

9. Trovare tutte le eventuali soluzioni del sistema seguente al variare del parametro $\lambda, 1 \leq \lambda \leq 10$:

$$\begin{cases} 5\lambda X + 2Y \equiv 3 \pmod{10} \\ \lambda X - Y \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

10. Dato il sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3X + 2\lambda Y \equiv 4 \pmod{9} \\ X - 2Y \equiv 1 \pmod{9} \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 8$, il sistema ammette un'unica soluzione;

(b) Trovare le soluzioni del sistema per $\lambda = 5$.

11. Sia $n \geq 2$. Mostrare che:

(a) se n è dispari, allora:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) \equiv 0 (\text{mod } n);$$

(b) per ogni n, allora:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 \equiv 0 (\text{mod } n);$$

(c) se $n \equiv 1, 5 (\text{mod } 6)$, allora:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 \equiv 0 (\text{mod } n).$$

Dare un controesempio esplicito per (a), quando n è pari, e per (c), quando $n \not\equiv 1, 5 (\text{mod } 6)$.