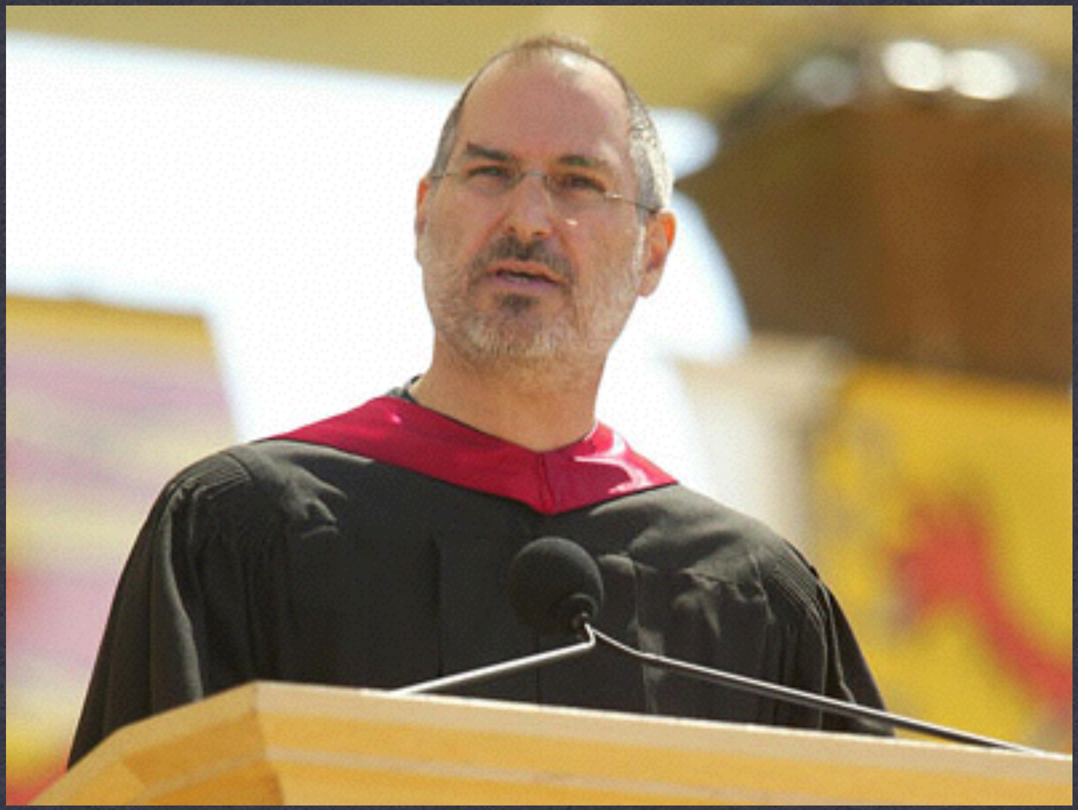
CUT AND PROJECT

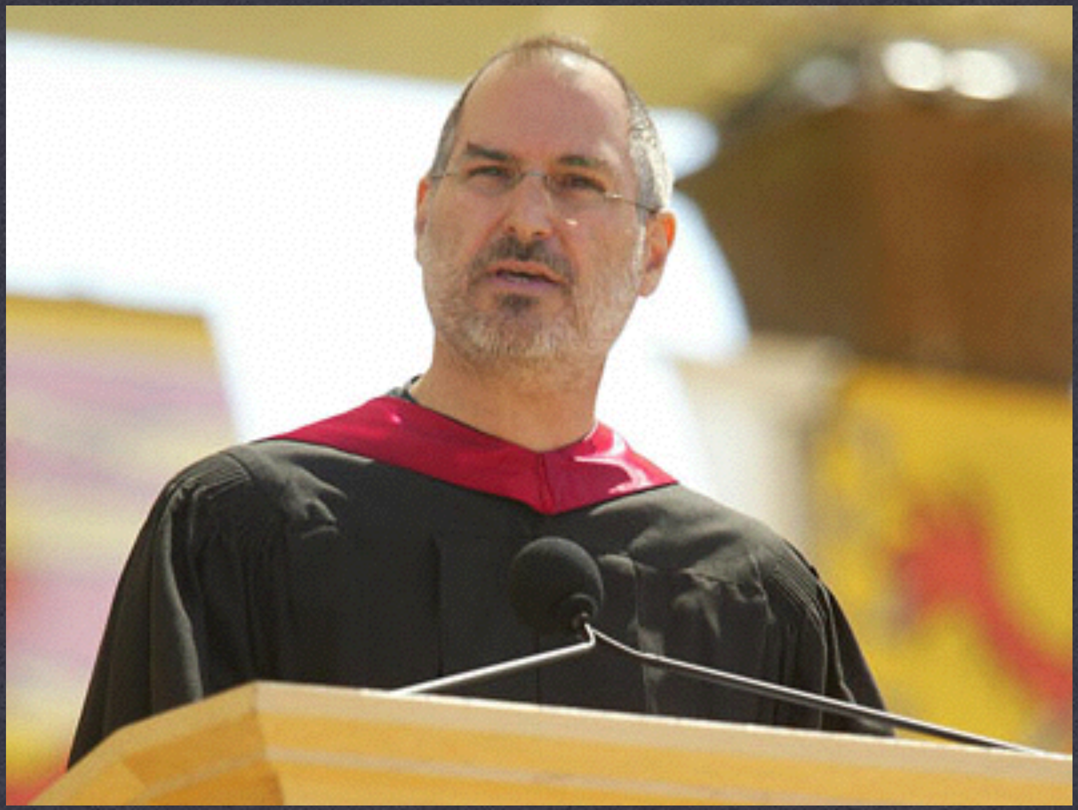
VIAGGIO NELLA MATEMATICA DEI QUASICRISTALLI

BENVENUTO !



BENVENUTO !

STEVE JOBS DICEVA CHE NELLA VITA QUELLO CHE AVEVA FATTO ERA DI CONNETTERE PUNTI. MA CHE SOLO GUARDANDO INDIETRO POTEVA CAPIRE.



BENVENUTO !

STEVE JOBS DICEVA CHE NELLA VITA QUELLO CHE AVEVA FATTO ERA DI CONNETTERE PUNTI. MA CHE SOLO GUARDANDO INDIETRO POTEVA CAPIRE.

	INSEGNAMENTO
AC310	Analisi complessa 1
AL110	Algebra 1
AL210	Algebra 2
AL310	Istituzioni di algebra superiore
AL410	Algebra commutativa
AL420	Teoria algebrica dei numeri
AL430	Anelli commutativi ed ideali
AM110	Analisi Matematica 1
AM120	Analisi Matematica 2
AM210	Analisi Matematica 3
AM220	Analisi Matematica 4
AM310	Istituzioni di analisi superiore
AM410	Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico
AM420	Spazi di Sobolev ed equazioni alle derivate parziali
AM430	Equazioni differenziali ordinarie
AN410	Analisi numerica 1
AN420	Analisi numerica 2
CP110	Probabilità 1
CP410	Probabilità 2
CP420	Processi stocastici
CP430	Calcolo stocastico
CR410	Crittografia 1
FM210	Fisica matematica 1
FM310	Fisica matematica 2
FM410	Fisica matematica 3
FS210	Fisica 1
FS220	Fisica 2
FS410	Fisica 3, relatività e teorie relativistiche
FS420	Meccanica quantistica ◎
GE110	Geometria 1
GE210	Geometria 2
GE220	Geometria 3
GE310	Istituzioni di geometria superiore
GE410	Geometria algebrica 1
GE420	Geometria differenziale 1

	INSEGNAMENTO
GE430	Geometria differenziale 2
IN110	Informatica 1
IN410	Informatica 2
IN430	Informatica 4, tecniche informatiche avanzate
IN440	Informatica 5, ottimizzazione combinatoria
IN450	Informatica 6, algoritmi per la crittografia
LM410	Logica matematica 1*
MA410	Matematica applicata ed industriale
MC410	Matematiche complementari 1
MC420	Storia della matematica 1
MC430	Laboratorio di calcolo per la didattica
MC440	Logica classica del primo ordine ❖
ME410	Matematiche elementari da un punto di vista s
MF410	Modelli matematici per mercati finanziari
ST410	Statistica 1
TN410	Introduzione alla teoria dei numeri

AMS

FREEMAN DYSON IN UN FAMOSO ARTICOLO SU NOTICES OF AMS CLASSIFICA I MATEMATICI IN DUE CATEGORIE:

BIRDS

http://www.ams.org/notices/200902/rtx090200212p.pdf%3Fq%3Dbirds-and-frogs

AMS

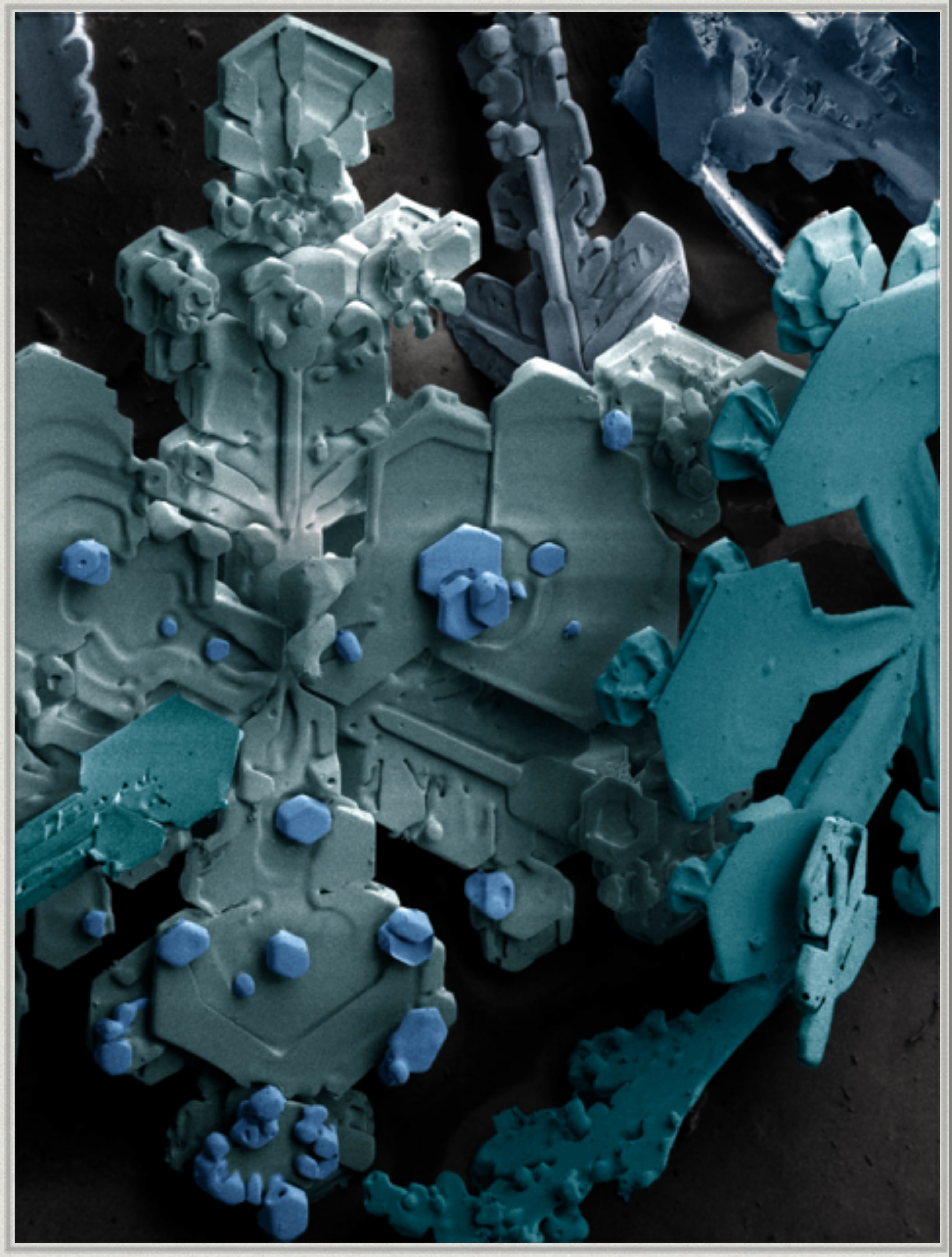
FREEMAN DYSON IN UN FAMOSO ARTICOLO SU NOTICES OF AMS CLASSIFICA I MATEMATICI IN DUE CATEGORIE:

FROGS

http://www.ams.org/notices/200902/rtx090200212p.pdf%3Fq%3Dbirds-and-frogs

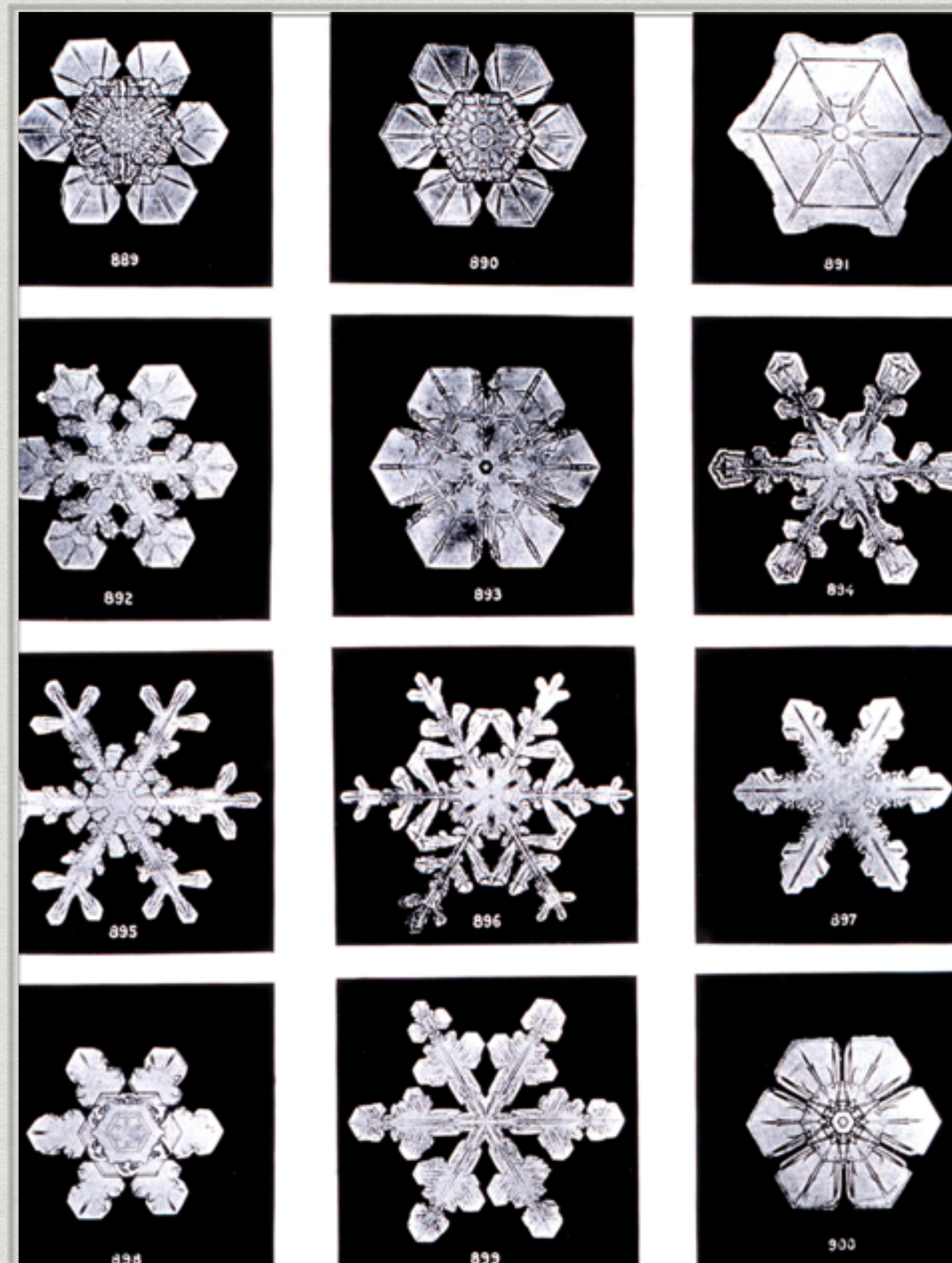
CRISTALLI

- Un cristallo (dal greco κρύσταλλος, *krýstallos*, ghiaccio) è uno stato della materia
    - materiali con una struttura ordinata basata sulla ripetizione di uno schema di base
    - si distinguono dallo stato in cui non c'è ordine, stato amorfo.



CRISTALLI

- Un cristallo (dal greco κρύσταλλος, *krýstallos*, ghiaccio) è uno stato della materia
  - materiali con una struttura ordinata basata sulla ripetizione di uno schema di base
  - si distinguono dallo stato in cui non c'è ordine, stato amorfo.



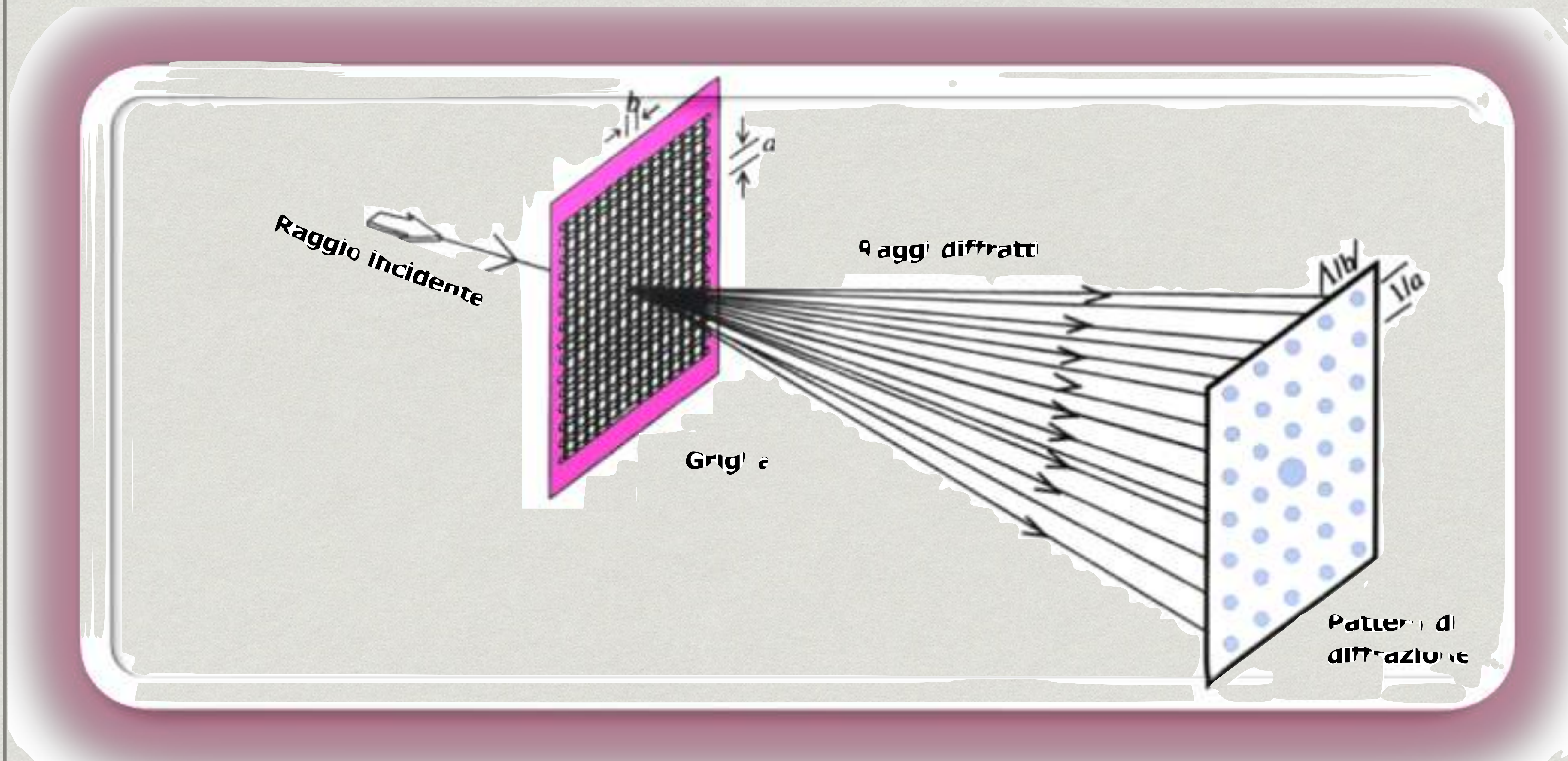
Hermann Weyl, *Symmetry.* Princeton Science Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1952. ISBN 0-691-02374-3

FISICA

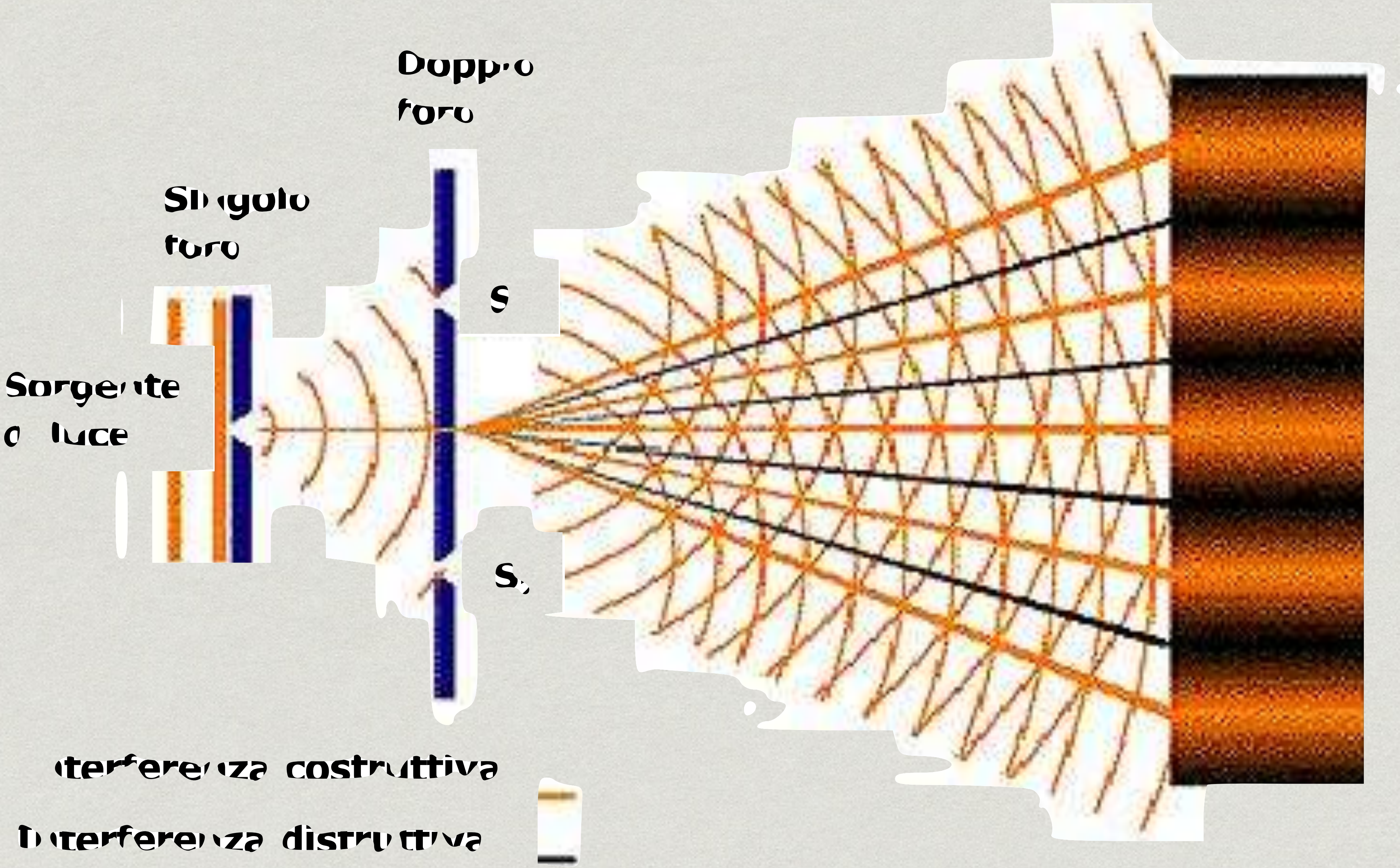
CRISTALLO o NON-CRISTALLO, QUESTO E' il PROBLEMA…

- AMORFO = sostanza solida che non ha struttura cristallina
- CRISTALLO = un **cristallo** è un oggetto solido costituito da atomi, molecole o ioni aventi una *disposizione geometricamente regolare*, che si ripete indefinitamente nelle tre dimensioni spaziali, detta reticolo cristallino o reticolo di Bravais.
- CRISTALLO (definizione operativa) = Un materiale è un cristallo se esso **ha essenzialmente un pattern di diffrazione.** La parola "essenzialmente" indica che la maggior parte dell'intensità diffratta è relativamente concentrata in picchi.

DIFFRAZIONE

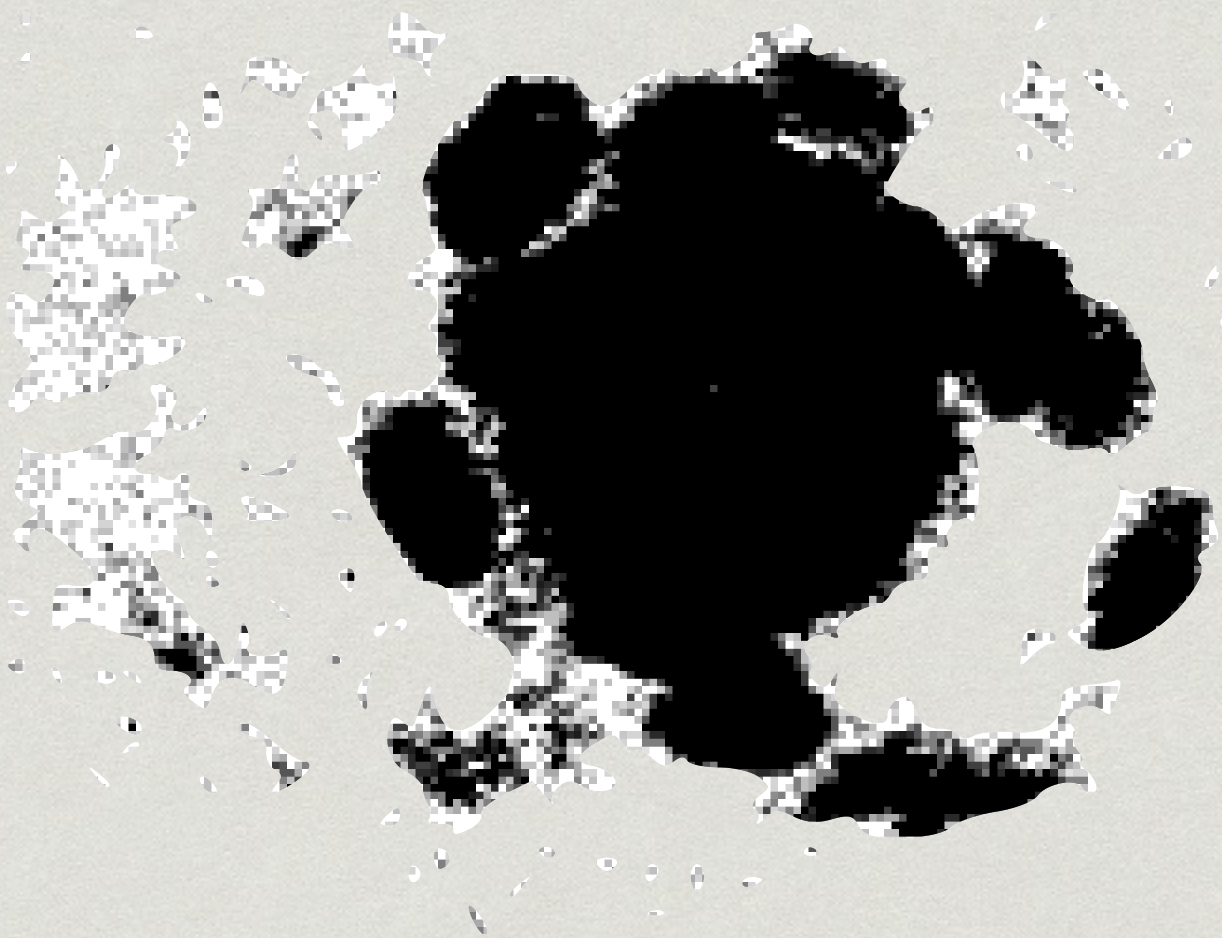


FENDITURE

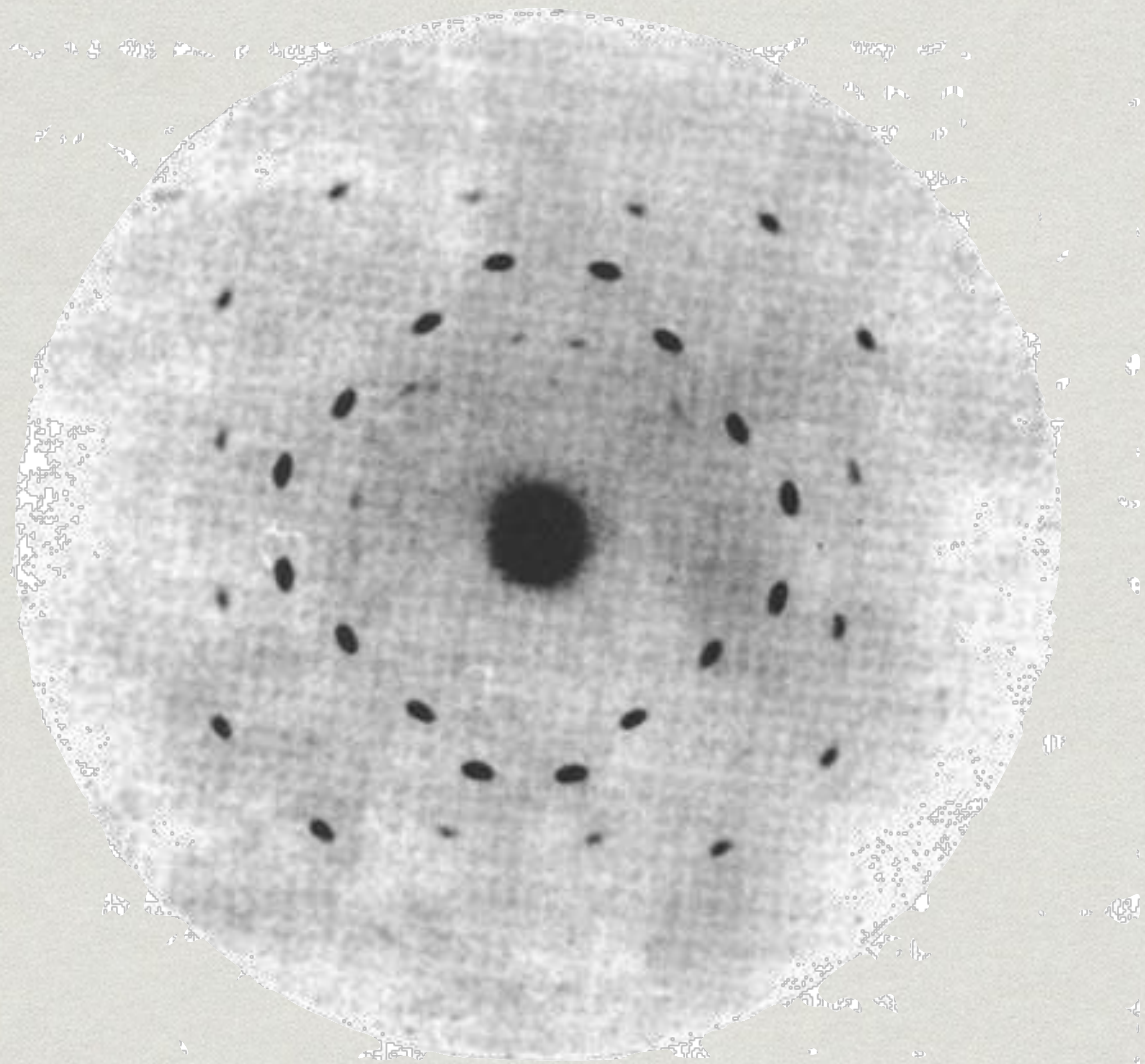


- nell’esperimento delle due fenditure si generano figure di interferenza
- in cristallografia la regolarità nelle figure di interferenza indicano la presenza di struttura cristallina (le fenditure sono quelle del reticolo atomico).

PATTERNS



Amorfo

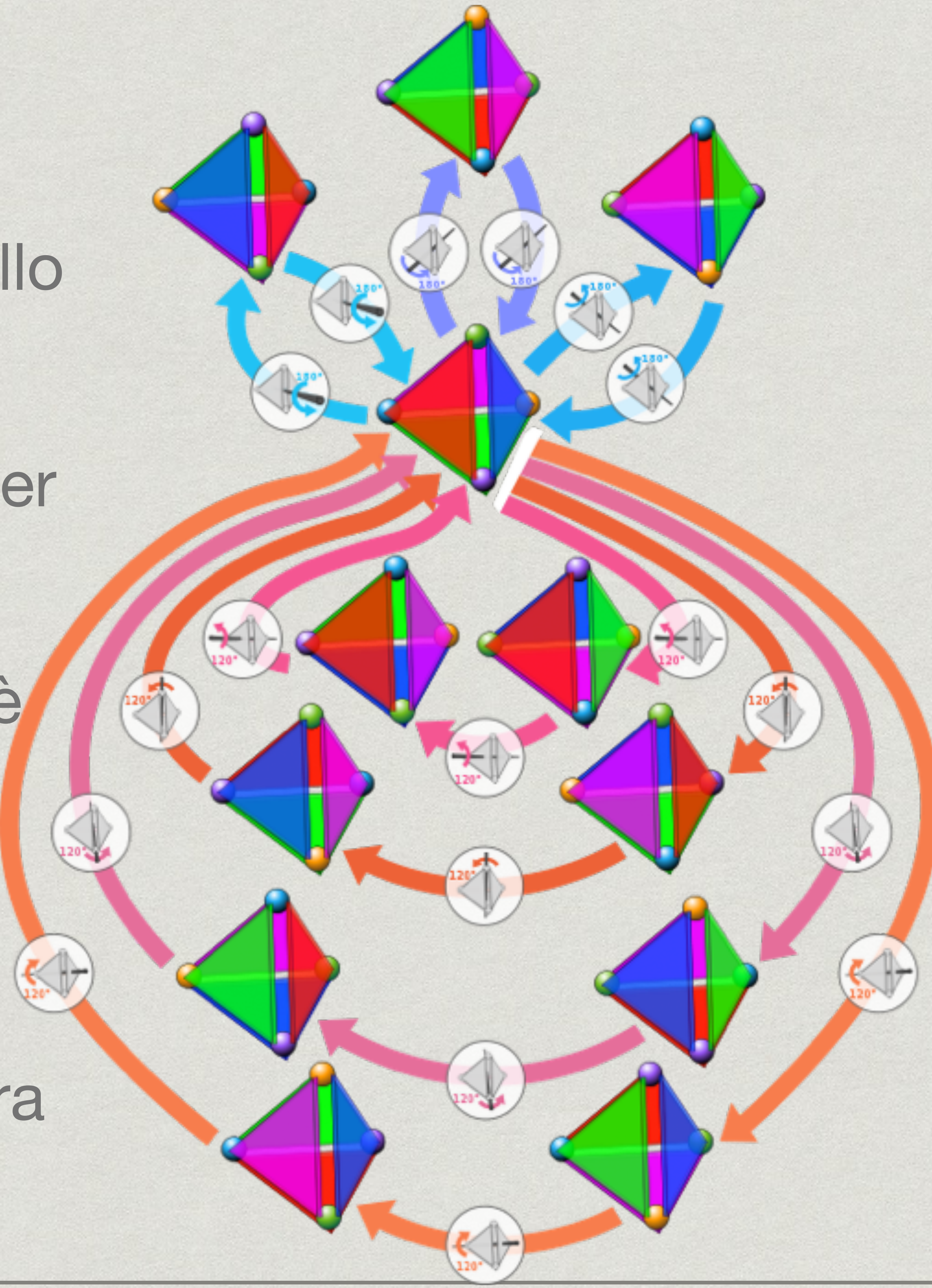


Cristallo

GEOMETRIA

REGOLARITA'

- **Simmetrie** nel piano e nello spazio
- **Ripetitività** = invariante per traslazione
- **Tassellature**: nei cristalli è possibile individuare una cella elementare, contenente il motivo strutturale, che traslata in due (o tre) direzioni, genera l'intera struttura.

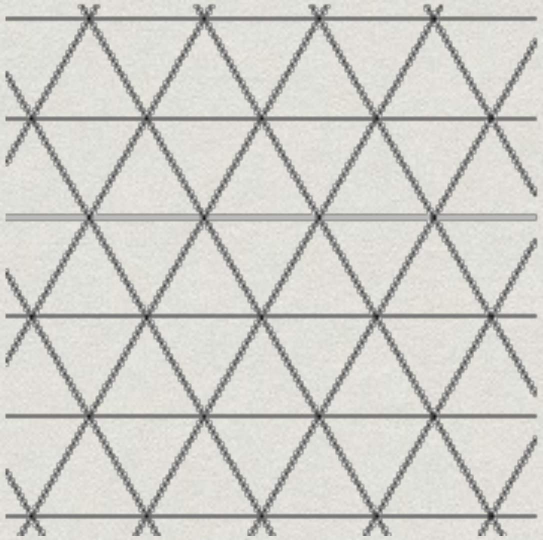


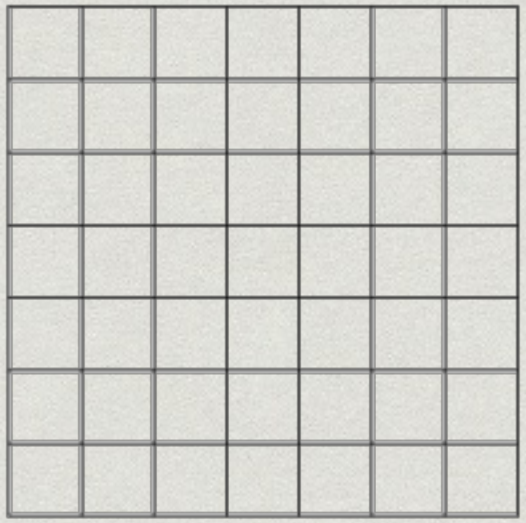
REGOLARITA’

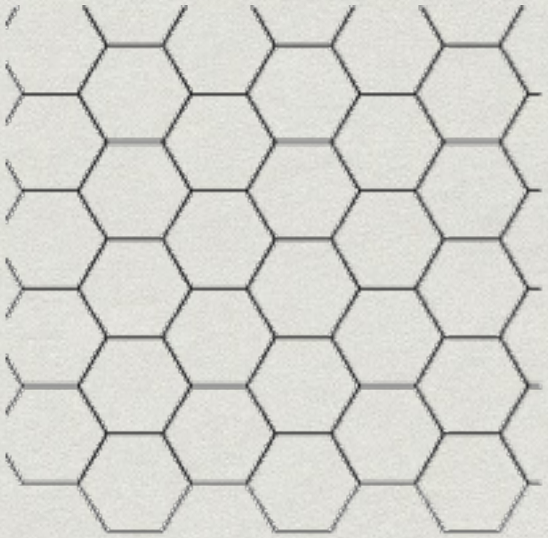
- **Simmetrie** nel piano e nello spazio
- **Ripetitività** = invariante per traslazione
- **Tassellature**: nei cristalli è possibile individuare una cella elementare, contenente il motivo strutturale, che traslata in due (o tre) direzioni, genera l’intera struttura.
- **Reticolo di Bravais**: è un reticolo di punti generato da un insieme di **traslazioni** di un punto iniziale, descritte da

$$\boldsymbol{R} = n_1\boldsymbol{a} + n_2\boldsymbol{b} + n_3\boldsymbol{c}$$

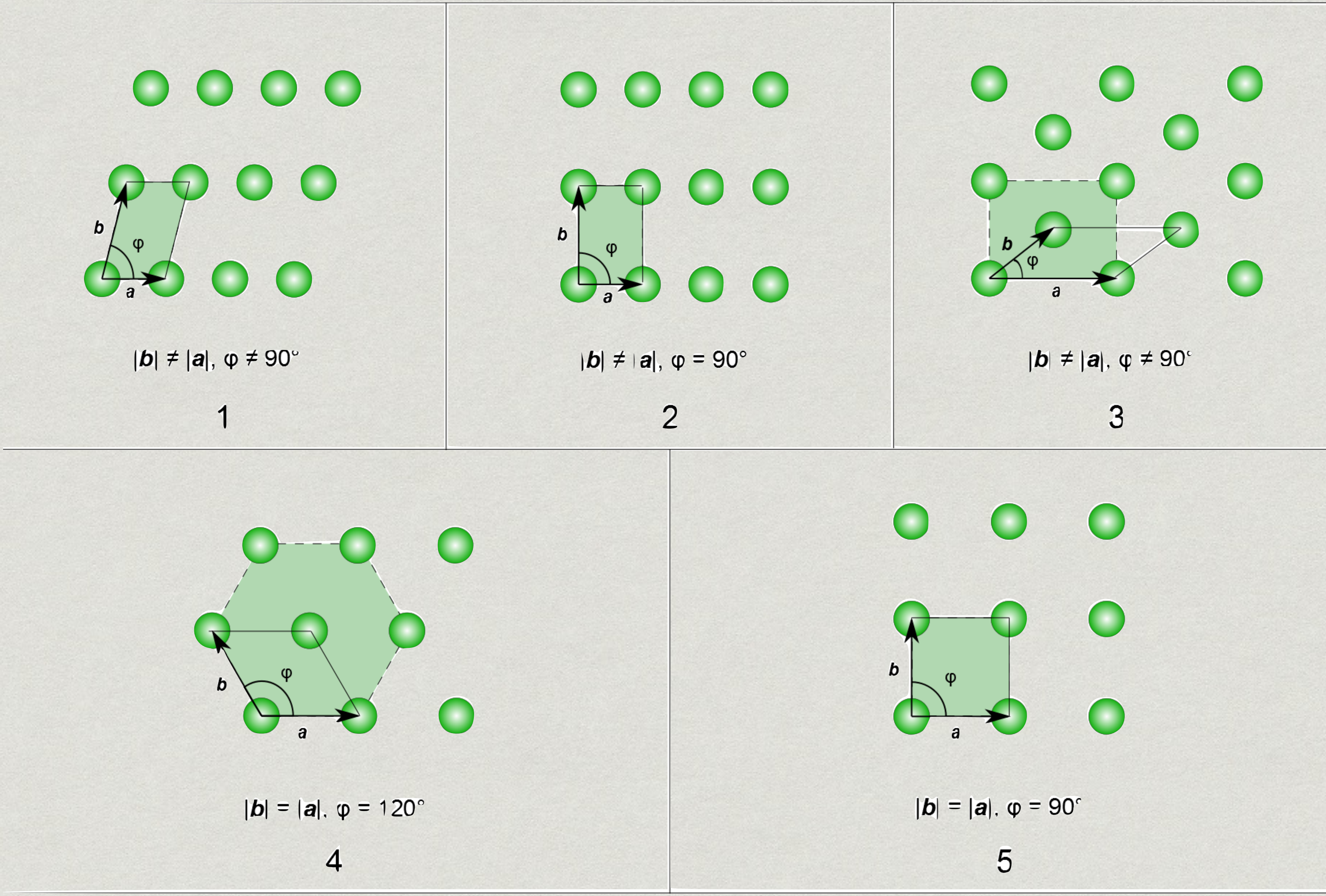
con n_1, n_2, n_3 numeri interi relativi.







RETICOLI IN 2D



1: $|\boldsymbol{b}| \neq |\boldsymbol{a}|$, $\varphi \neq 90°$

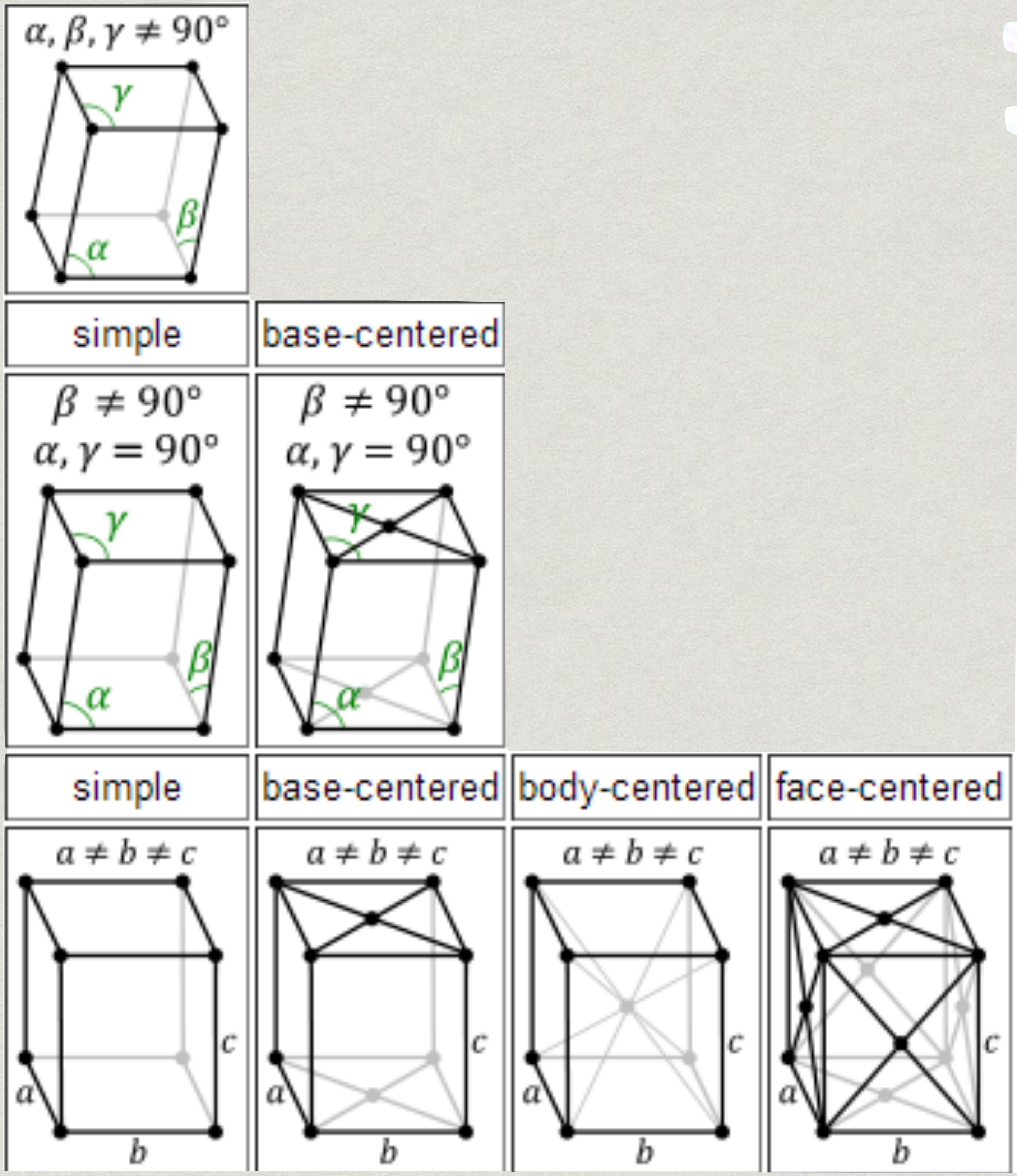
2: $|\boldsymbol{b}| \neq |\boldsymbol{a}|$, $\varphi = 90°$

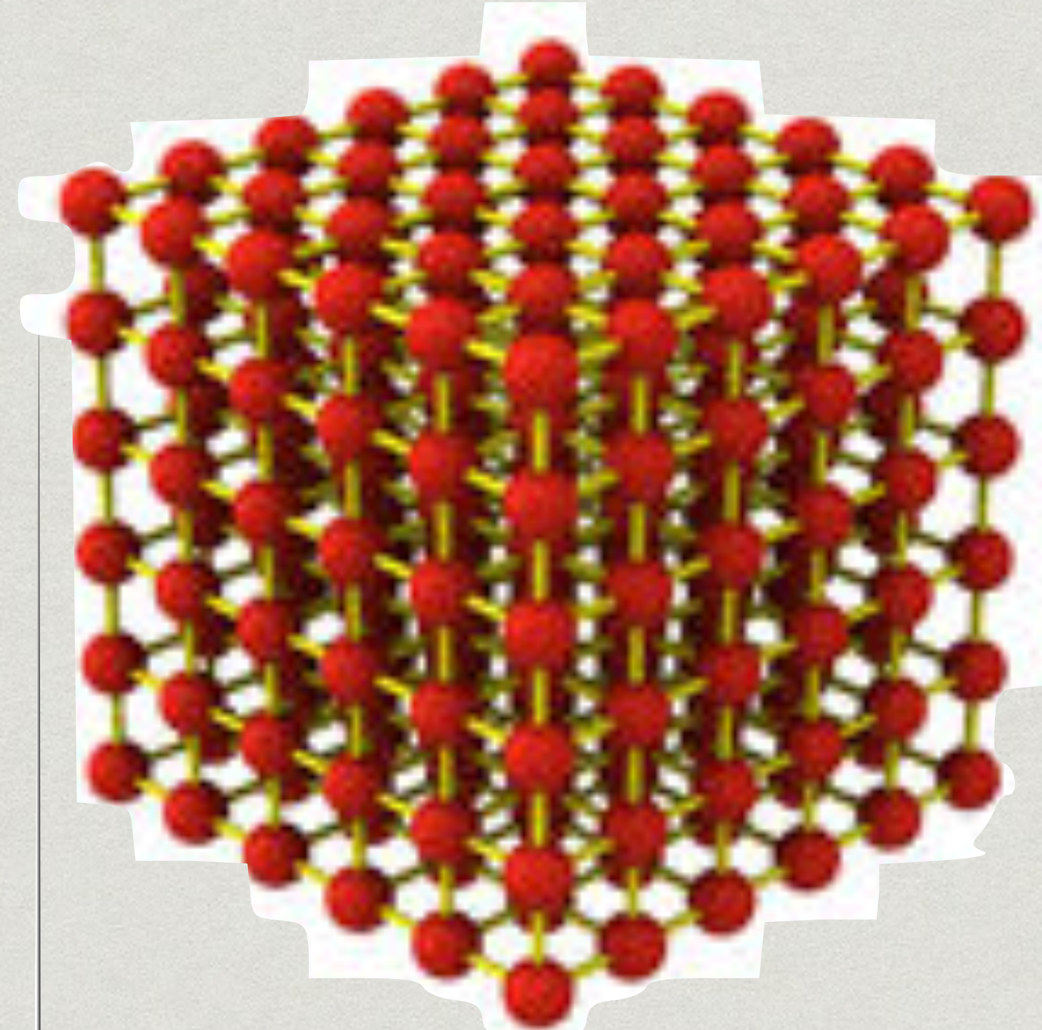
3: $|\boldsymbol{b}| \neq |\boldsymbol{a}|$, $\varphi \neq 90°$

4: $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|$, $\varphi = 120°$

5: $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|$, $\varphi = 90°$

RETICOLI in 3D

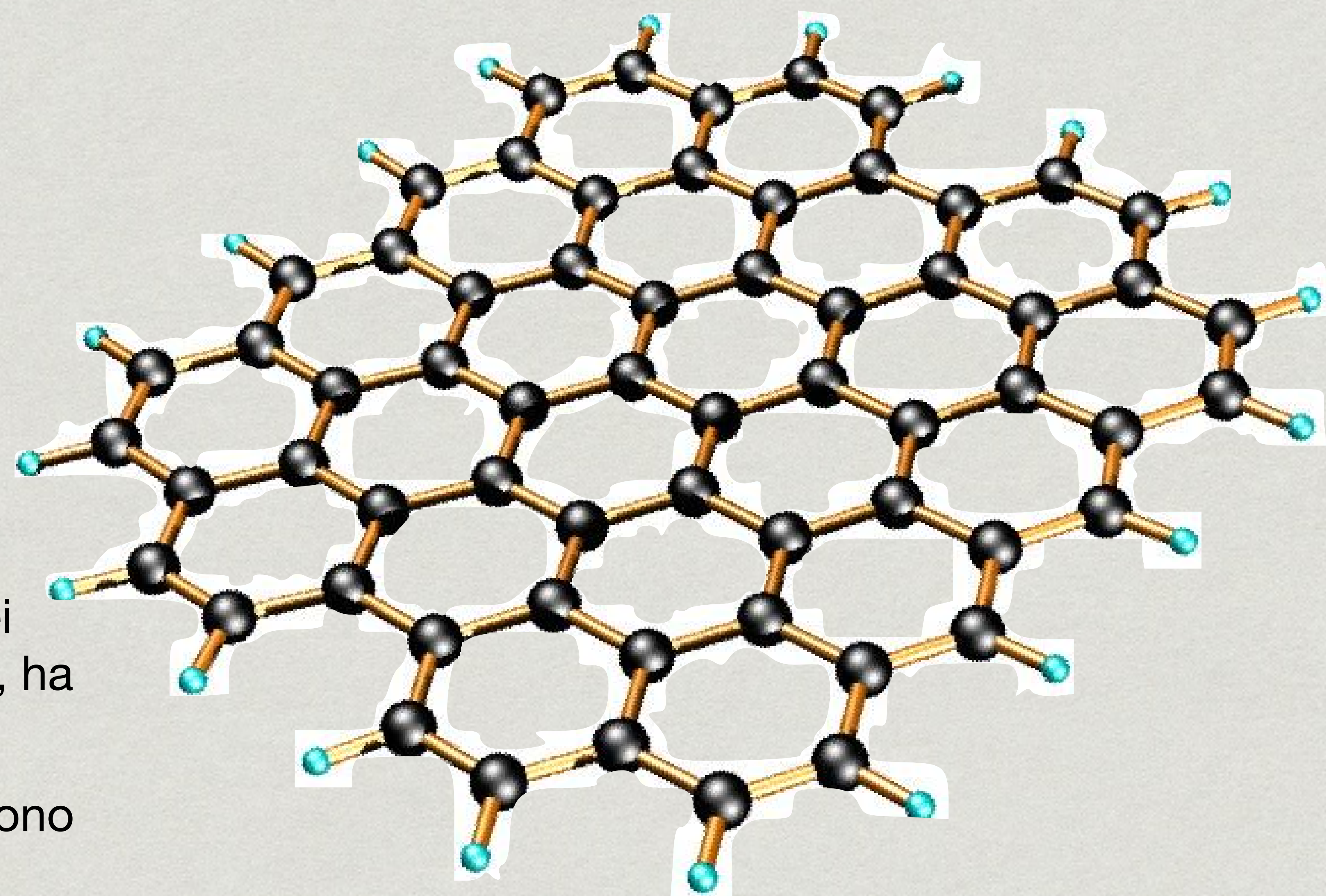




RETICOLI DI BRÀVAIS

Finora abbiamo considerato ai vertici del reticolo di Bravais solo dei punti, oppure delle "sferette tutte uguali", cioè oggetti di massima simmetria.

Se immaginiamo che queste sferette siano gli atomi, potremo descrivere solo *alcuni* cristalli fatti da *un solo tipo* di atomo!

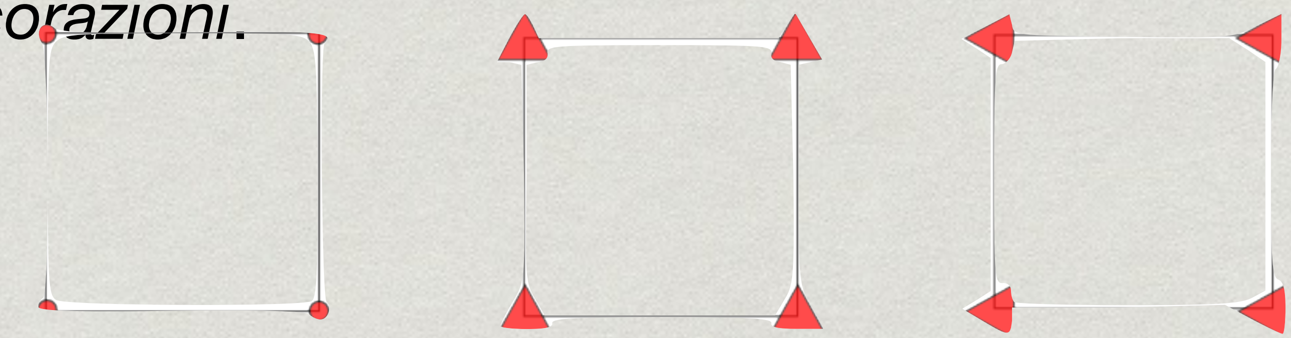


Per esempio il famoso *grafene*, uno dei materiali più studiati in questo periodo, ha una struttura a nido d'ape.

Le posizioni degli atomi non costituiscono un reticolo di Bravais!

Reticoli Decorati

Immaginiamo di porre al posto di questi punti di massima simmetria, degli oggetti più complessi, dette *decorazioni*.

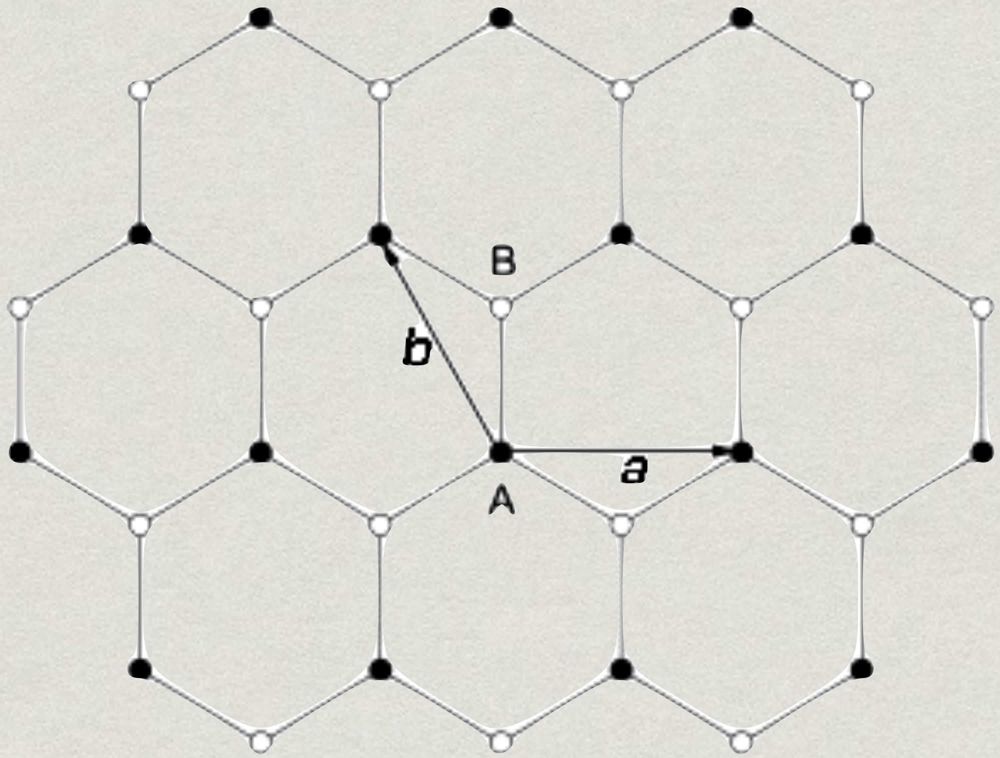


Potremo ottenere un'infinità di reticoli diversi! Tra cui tutte le **strutture cristalline**.

Gli oggetti che vengono posti nei punti del reticolo di Bravais, possono distruggere la simmetria del reticolo scelto.

Per esempio in 2D, se si usa un reticolo quadrato e una decorazione a forma di triangolo, tale decorazione romperà la simmetria per rotazioni di 90°!

Nel caso visto prima di una struttura a nido d'ape, ho bisogno di un reticolo di Bravais di tipo 4 (esagonale, indicato dai pallini neri) in cui in ogni punto del reticolo viene posta una "decorazione" fatta da due atomi: uno è nella stessa posizione dei punti del reticolo (A), mentre l'altro è posizionato verso l'alto di una certa quantità

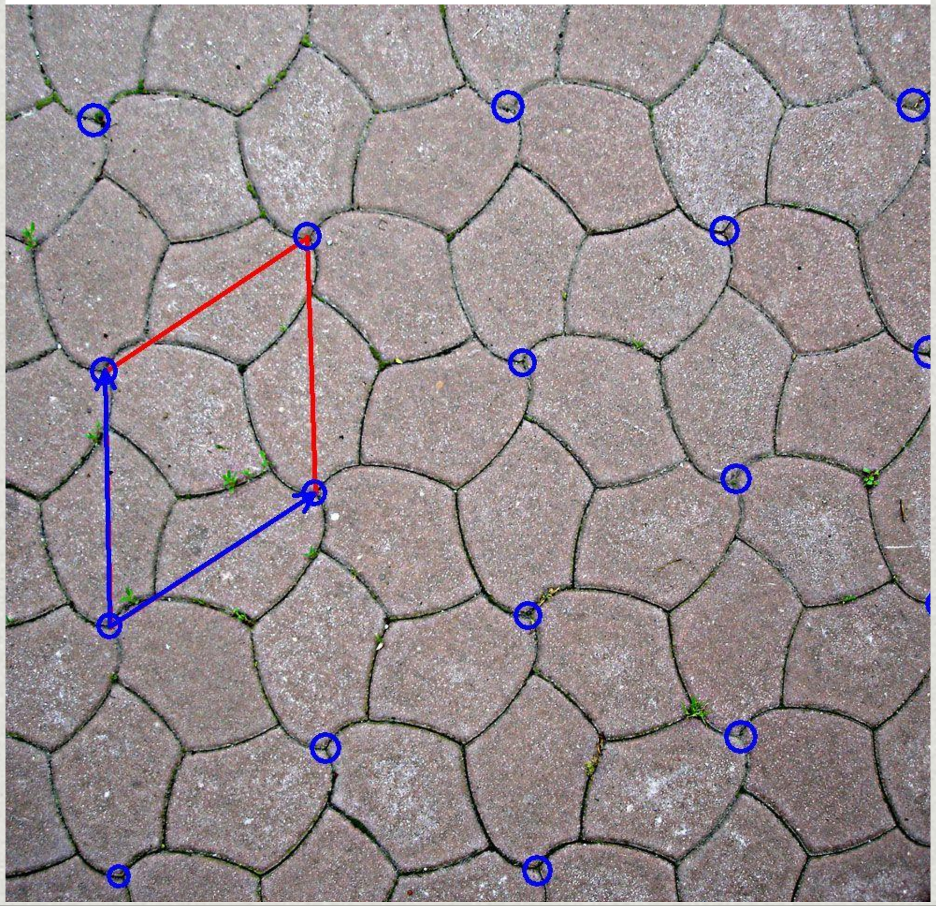


TASSELLAZIONI

Per *tassellazione* di un piano si intende un modo di ricoprire il piano usando un numero finito di figure piane (tasselli) disposte in modo da non sovrapporsi e allo stesso non lasciare alcun buco.

Le *tassellazioni periodiche* sono tassellazioni in cui una parte della tassellazione, traslata secondo due vettori di base, può ricostruire tutta la tassellatura del piano.

In sostanza stiamo parlando di una opportuna decorazione da attribuire a un reticolo di Bravais.



Teorema della restrizione cristallografica

Le simmetrie per rotazione possibili in un reticolo di Bravais sono solo quelle di 60°, 90°, 120°, 180°, 360°.

TASSELLAZIONI NON PERIODICHE

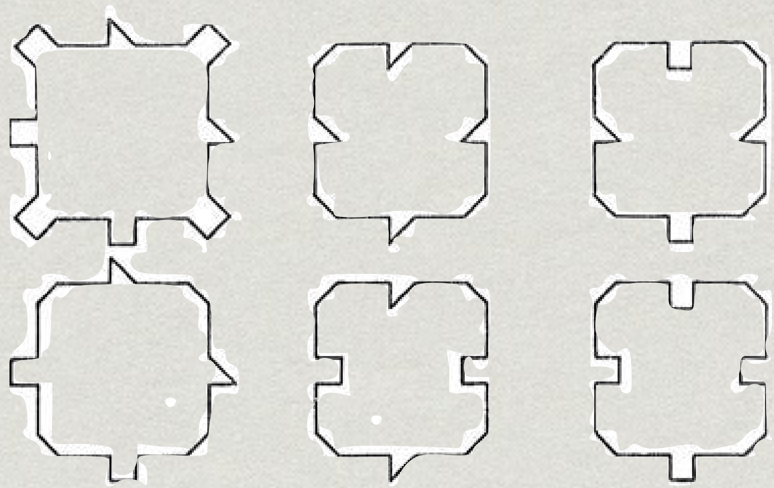
Negli anni ’60 - ’70 si pose il problema di sapere se esistesse un insieme di tasselli che permettesse di ricoprire il piano ***solo*** in maniera non periodica.

Un insieme di tali tasselli viene detto *aperiodico*.

1966 Robert Berger. 20426 tasselli! Poi 104 tasselli.

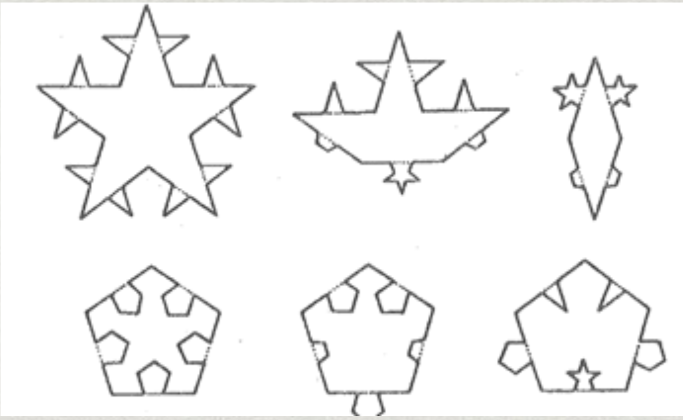
1968 Donald Knuth. 92 tasselli

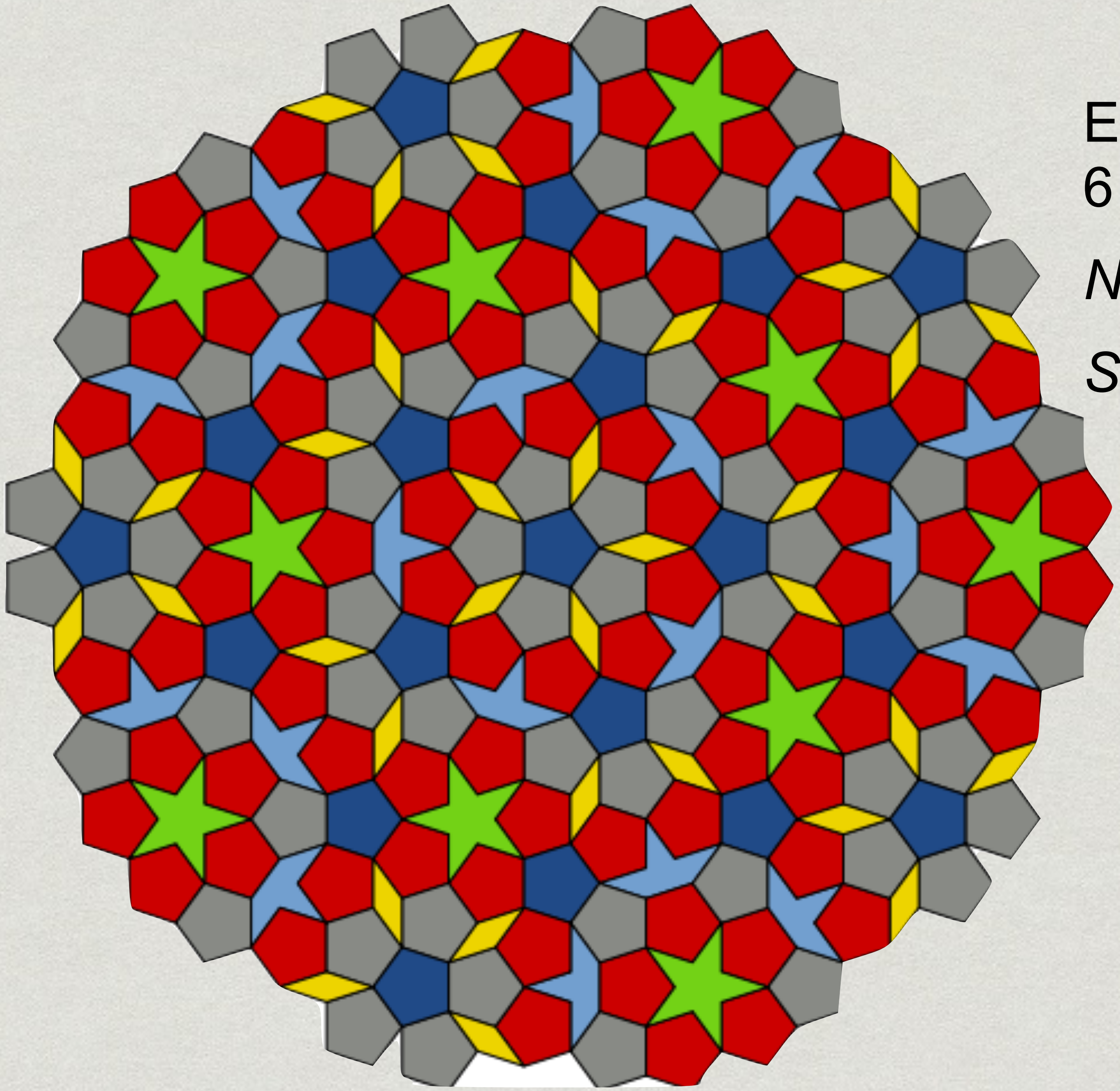
1971 Raphael Robinson. 6 tasselli



TASSELLAZIONI À LA PENROSE

1973 Roger Penrose. 6 tasselli

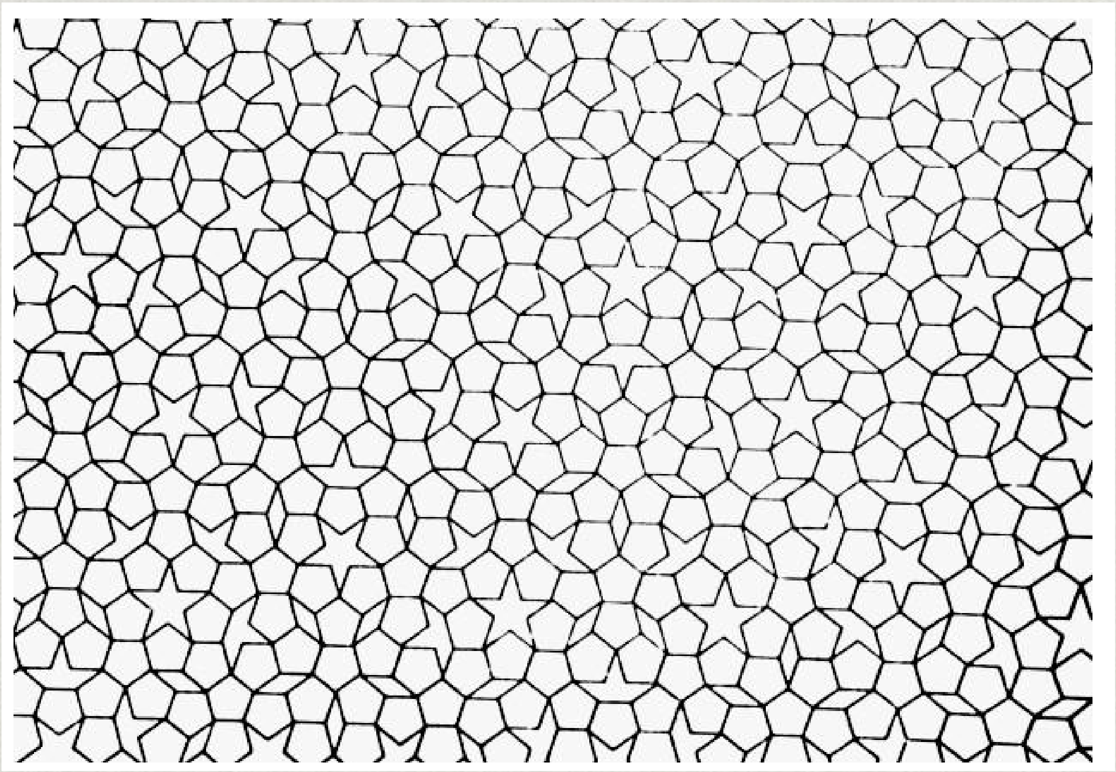




Esempio di tassellazione del piano con questi 6 tasselli

No simmetria traslazionale: non- periodico

Simmetria pentagonale rispetto a un punto



PROBLEMA APERTO

Quesito: esiste un tassello che, usato da solo, può generare ***solo*** ricoprimenti non periodici del piano?

A questa domanda ancora nessun matematico ha saputo dare una risposta.

ALGEBRA

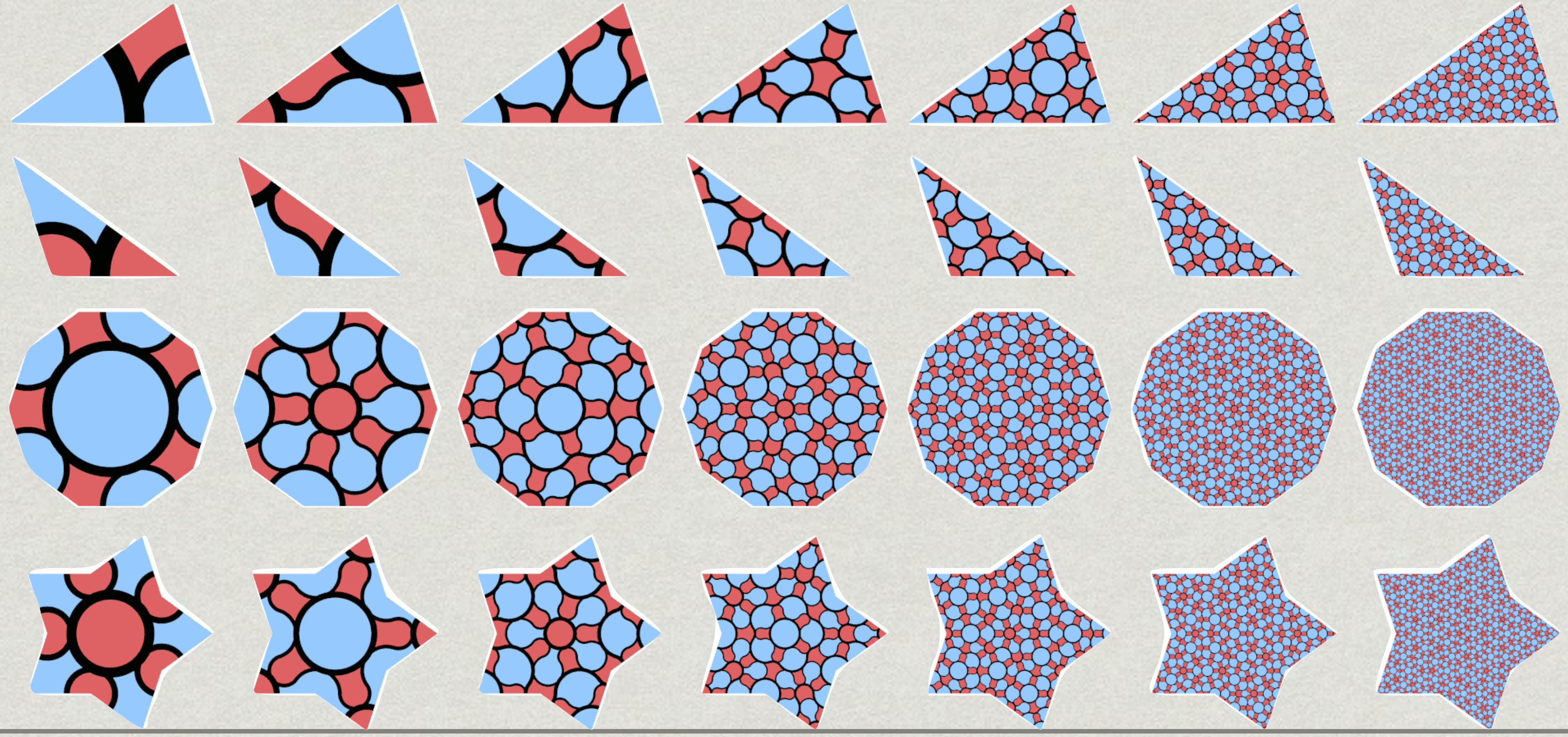
Sostituzioni:

Deflation e Inflation

Un metodo per generazione tassellazioni non periodiche è quello delle sostituzioni di tasselli con tasselli: d*eflation* e i*nflation*.

Auto similarità tipica dei frattali. Penrose ottenne la sua prima tassellazione in questo modo.

Proprietà della sezione aurea: $\varphi^n = m\varphi + p$ con n, m, p naturali.



FIBONACCI

Esempio della successione di Fibonacci, un reticolo quasi periodico in una dimensione.

Due segmenti di lunghezza S ed L in rapporto L/S = ϕ.

Parto da un reticolo periodico composto di tutti segmenti S e seguo le seguenti regole:

A. Sostituisco S con L
B. Sostituisco L con LS (non devo sostituire le L appena create al passo 1)

Non-periodica ma ordinata, posso prevedere la posizione di L ed S.

Inoltre il limite del rapporto tra numero di L e numero di S tende proprio alla sezione aurea ϕ.

La lunghezza del periodo della sequenza ad ogni passo è un numero di Fibonacci F(0)=0, F(1)=1, F(n+1) = F(n) + F(n-1) :

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\dots$$

TAGLIA E PROIETTA

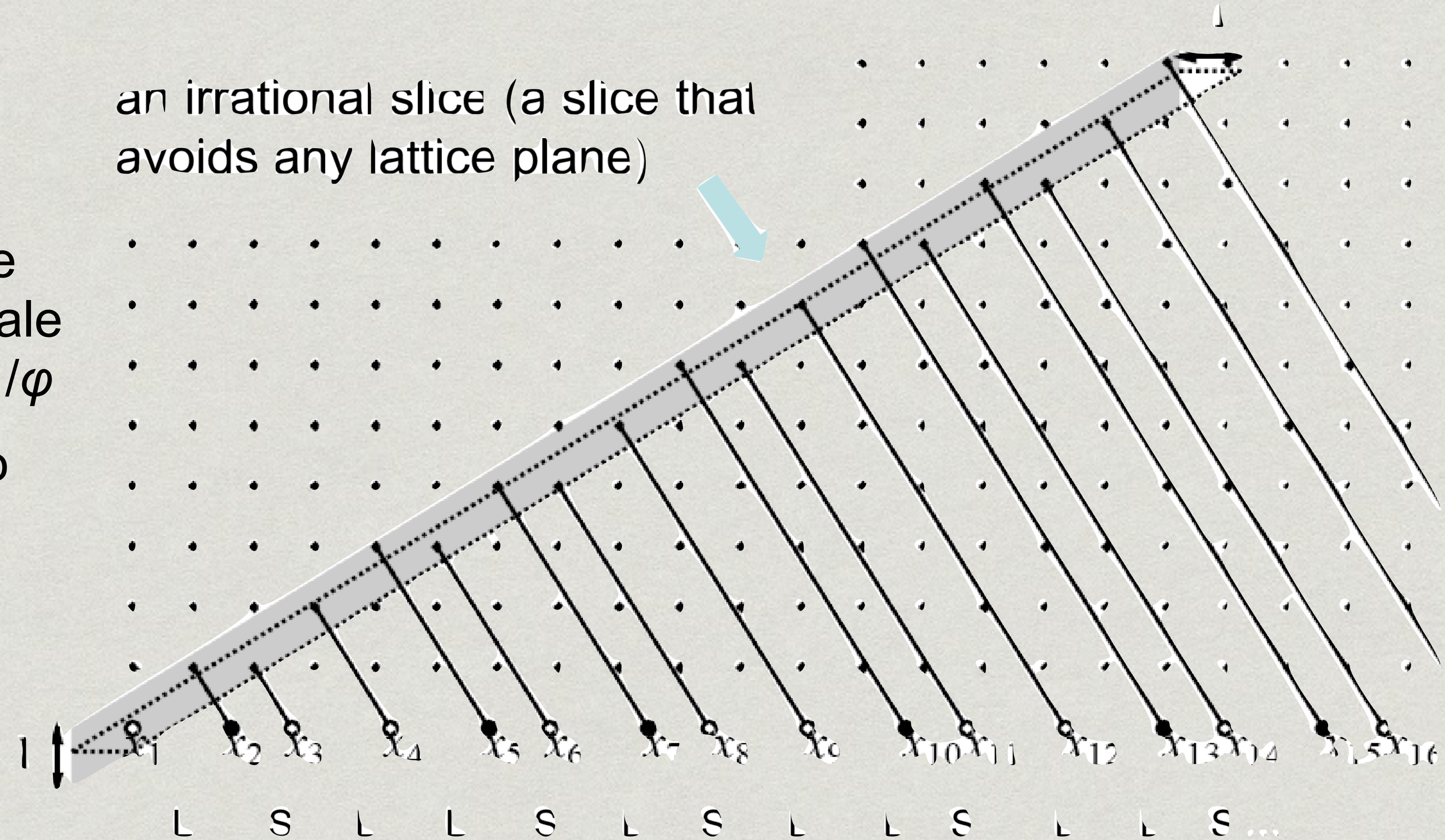
Il metodo appena visto per generare la catena di Fibonacci è un'*inflazione* descritta, in forma matriciale dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L+S \\ L \end{pmatrix}$$

Un altro modo è quello della proiezione dei punti all'interno di una striscia di un reticolo periodico di dimensione maggiore (*metodo taglia e proietta*)

Prendendo il coefficiente angolare della retta uguale a φ (***sezione aurea***) o $1/\varphi$

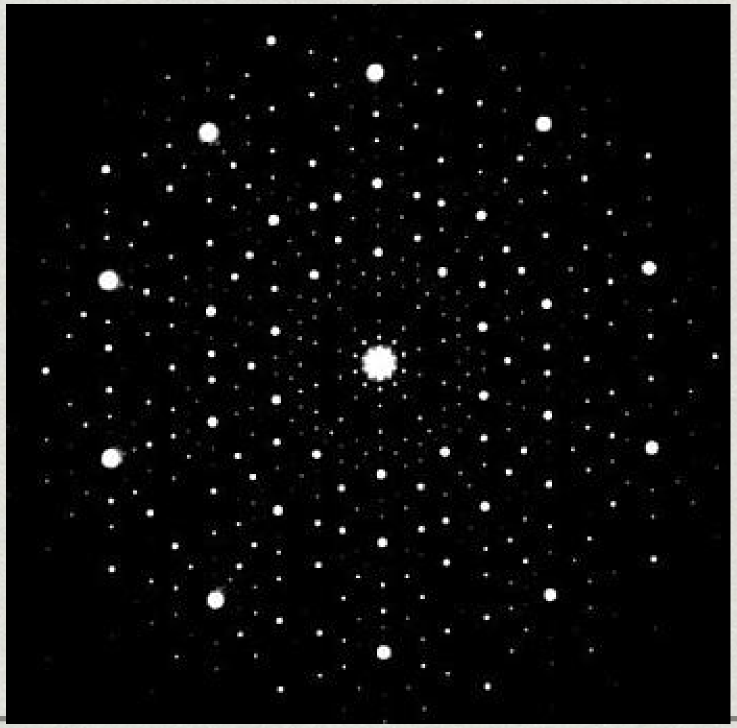
Da si proietta un reticolo 2D periodico su uno 1D non-periodico.

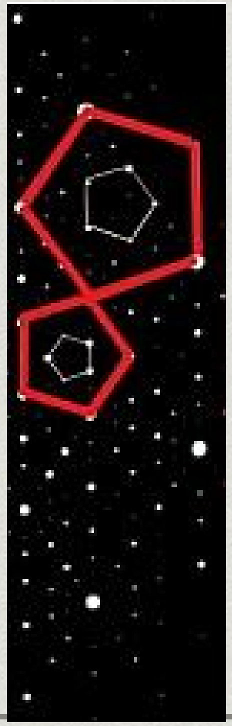


La scoperta

Nel 1982 Dan Shechtman (1941-) stava osservando al TEM dei campioni di leghe Al(14%)-Mn velocemente raffreddati.

Il fascio di elettroni usato nel TEM permette sia di "vedere" come in un microscopio classico, sia di usare gli elettroni come "onde" e osservarne la figura di diffrazione (LEED).





Subito dopo, nel 1984, Paul Steinhardt e Dov Levine comprendono che la figura di diffrazione osservata da Shechtman può essere compresa se si ipotizza che il cristallo abbia una superficie alla Penrose!

Di conseguenza si capisce che tutto il cristallo deve essere un reticolo non periodico alla Penrose.

Paul Steinhardt conia il termine ***quasicristallo***

Nel 1984 pubblicò l'articolo. Fu criticato in maniera molto pesante. Soprattutto da Linus Pauling, uno dei massimi chimici della storia:

"Non esistono quasi-cristalli, solo quasi-scienziati"

Veniva ridicolizzato nei corsi di cristallografia e il suo capo gli disse di tornare a casa a studiare il libro di testo e di dimettersi per il buon nome dell'istituto dove lavorava.

- Ma cominciarono ad arrivare le prove da altri laboratori.
- Nel 2011 gli venne assegnato il premio Nobel per la Chimica
- La nuova definizione:
  - I **cristalli** hanno ordine a lungo raggio dato da simmetria traslazionale. Figure di diffrazione con picchi ben definiti che ne mettono in risalto la simmetria.
  - Gli **amorfi** sono senza ordine o con ordine a cortissimo raggio a causa della mancata simmetria traslazionale. Non mostrano figure di diffrazione con picchi definiti.
  - **Quasicristalli** hanno ordine a lungo raggio *senza* simmetria traslazionale. Figure di diffrazione con picchi ben definiti che ne mettono in risalto la simmetria.

Finora sono stati realizzati in laboratorio più di 100 quasi-cristalli diversi.

Le simmetrie trovate sono non solo di ordine 5, ma anche 8, 10, 12.

Questo ha portato a una grande spinta anche nella ricerca matematica di reticoli quasiperiodici tridimensionali.