

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Spiegare come usare la nozione di simbolo di Jacobi per calcolare il simbolo di Legendre.
2. Dimostrare che esistono infinite coppie di interi positivi (a, n) con $a < n$ e tali che il simbolo di Jacobi $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ ma la congruenza $X^2 \equiv a \pmod{n}$ non ammette soluzione.
3. Assumere la legge di reciprocità quadratica per simboli di Legendre e la si dimostri per simboli di Jacobi.
4. Mostrare che se n è privo di fattori quadratici e f è una funzione aritmetica moltiplicativa allora

$$(f * f * f)(n) = f(n) \cdot (\tau * \mathbf{1})(n).$$

5. Enunciare e dimostrare la formula di inversione di Möbius.
6. Calcolare $(\varphi * \varphi * \varphi)(2^4)$.
7. Mostrare che se (x, y, z) è una terna pitagorica, allora $60 \mid xyz$.
8. Enunciare il Teorema di classificazione delle terne pitagoriche positive, primitive e normali.
9. Trovare tutte le 10 soluzioni di $x^2 + 2y^2 = 162$.
10. Scrivere 13940 come somma di due quadrati in almeno 9 modi diversi.
11. Mostrare che i numeri della forma $7 \cdot 4^e$ non si possono scrivere come somme di tre quadrati e scriverli come somma di quattro quadrati.
12. Enunciare e dimostrare il Teorema dei quattro quadrati.