

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Descrivere tutte le soluzioni dell'equazione diofantea $x - 2y + 3z = 2$.
2. Trovare tutte le soluzioni intere di $\begin{cases} X + Y \equiv 3 \pmod{7} \\ X + 3Y \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$ con $X, Y \in [0, 20)$.
3. Enunciare e dimostrare il Teorema del sollevamento.
4. Determinare il numero di soluzioni di $X^3 \equiv 2 \pmod{32}$.
5. Definire la nozione di radice primitiva e descrivere quale sono gli elementi di \mathbf{N} che ammettono una radice primitiva.
6. Dimostrare che $\mathbf{Z}/36\mathbf{Z}$ non ammette una radice primitiva determinando l'ordine di ciascuno dei suoi elementi invertibili.
7. Calcolare il seguente simbolo di Jacobi $\left(\frac{2004}{1999}\right)$.
8. Dopo aver definito la nozione di simbolo di Legendre, se ne enuncino e dimostrino le proprietà principali
9. Enunciare e dimostrare la formula di inversione di Möbius.
10. Scrivere 127 come la somma del minor numero di quadrati.
11. Scrivere 1611090 come somma di due quadrati.
12. Sia n un numero dispari che si può scrivere come $n = x^2 + 2y^2$. Dimostrare che necessariamente si deve avere $n \equiv 1 \pmod{8}$ oppure $n \equiv 3 \pmod{8}$.