

# Tutorato di TE1

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. F. Pappalardi

Tutori: Annamaria Iezzi e Dario Spirito

TUTORATO 9

13 MAGGIO 2010

1. Determinare dei campi  $F$  tali che  $\text{Gal}_{\mathbb{Q}} F$  sia isomorfo a:

a)  $\mathbb{Z}_{13}$

b)  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$

c)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

2. Determinare se i seguenti numeri sono costruibili e, in caso affermativo, determinare esplicitamente una costruzione:

a)  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

e)  $\sqrt{\sqrt{4} - \sqrt{5}}$

i)  $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

b)  $-64i\sqrt{2}$

f)  $\xi_{32} + \xi_{32}^{-1}$

j)  $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

c)  $\frac{4}{9}\sqrt{\frac{6}{7}}\sqrt{3}$

g)  $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}}$

d)  $\sqrt{e}$

h)  $\xi_{51}$

k)  $\text{Re}(\xi_{88}^2 + \xi_{87})$

3. Per  $n \in \{4, 5, 6\}$ , determinare un polinomio di grado  $n$  irriducibile su  $\mathbb{Q}$  che abbia tutte radici reali.

4. Determinare il numero di radici in  $\mathbb{F}_{81}$  dei polinomi  $X^{80} - 1$ ,  $X^{81} - 1$  e  $X^{88} - 1$ .

5. Fattorizzare il polinomio  $X^4 + 1$  in  $\mathbb{F}_5[X]$ ,  $\mathbb{F}_{25}[X]$  e  $\mathbb{F}_{125}[X]$ .

6. Siano  $p$  e  $q$  numeri primi. Dimostrare che per  $n \geq 1$  il numero di polinomi di grado  $p^n$  irriducibili in  $\mathbb{F}_q[X]$  è

$$\frac{q^{p^n} - q^{p^{n-1}}}{p^n}$$

Dedurre il numero di fattori irriducibili del polinomio  $X^{255} - 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ . Quali sono i fattori irriducibili di  $X^{255} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ?