Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di TE1

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. F. Pappalardi
Tutori: Annamaria Iezzi e Dario Spirito

Tutorato 5
8 aprile 2010

1. Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:

   a) $X^{15}-1$
   b) X^4-2
   c) X^3+X+1

2. Determinare tutti gli automorfismi delle seguenti estensioni di campi e tutti i sottocampi intermedi:

   a) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{7})$
   b) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\xi_9)$
   c) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\xi_{10},i)$
   d) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$
   e) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\xi_{12}^2,\xi_5+\xi_5^{-1})$
   f) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\xi_{18}^8,\xi_{35}^5)$

3. Trovare il polinomio minimo dei seguenti numeri complessi su $\mathbb{Q}$ e su E:

   a) $\sqrt{2}+3\sqrt{3},\quad E=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   b) $\sqrt{5}-\sqrt{10},\quad E=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   c) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$
   d) $3\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+4$ [Nota 1]
   e) $\sqrt[4]{2}-i,\quad E=\mathbb{Q}(i)$
   f) $\sqrt[5]{2+\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}},\quad E=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   g) $\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)$
   h) $\xi_5+\xi_5^2$ [Nota 2]
   i) $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

4. Stabilire se i seguenti campi sono normali su $\mathbb{Q}$ e, in caso negativo, costruire la sua *chiusura normale* (ovvero il più piccolo campo normale su $\mathbb{Q}$ che lo contiene):

   a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$
   b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt[3]{5})$
   c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i,\sqrt[5]{7})$
   d) $\mathbb{Q}(\xi_{13}^3+\xi_{13}-2)$
   e) $\mathbb{Q}(i\sqrt{3},\sqrt[3]{5})$
   f) $\mathbb{Q}(\xi_{13}+\xi_{13}^3+\xi_{13}^6+\xi_{13}^9+\xi_{13}^{12})$

5. Determinare i polinomi minimi dei seguenti numeri appartenenti ad estensioni su $\mathbb{Q}$:

   a) $8\alpha+\frac{1}{3}$, dove $\alpha^4+4\alpha^3+2\alpha-2=0$
   b) β^3, dove $\beta^7+9\beta^6-3\beta^3+6=0$
   c) γ^2-1, dove $\gamma^3+5\gamma^2+3=0$
   d) δ^2+1, dove $\delta^3+6\delta+12=0$

6. Determinare l'inverso dei seguenti numeri, tutti appartenenti ad estensioni di $\mathbb{Q}$:

   a) α, dove $\alpha^3-8\alpha^2+\alpha-1=0$
   b) β^2-1, dove $\beta^4-2\beta^2+6\beta+10=0$
   c) $\gamma^2-2\gamma+4$, dove $\gamma^3-3\gamma+2=0$
   d) δ^6+1, dove $\delta^5-4\delta+2=0$
   e) ϵ^3+4, dove $\epsilon^2-\epsilon+1=0$
   f) $\zeta+6$, dove $\zeta^3-2\zeta^2+1=0$

---

[1] Usare la sostituzione $Y=X+\frac{1}{X}$

[2] Suggerimento: i coniugati di $\alpha+\beta$ sono nella forma $\alpha'+\beta'$, dove α' e β' sono opportuni coniugati di α e β. Per i più bravi: dimostrarlo.