Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di TE1

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. F. Pappalardi
Tutori: Annamaria Iezzi e Dario Spirito

Tutorato 2
11 marzo 2010

1. Trovare il polinomio minimo dei seguenti numeri complessi (dove non indicato il campo base è $\mathbb{Q}$):
   a) $\sqrt[4]{2}$
   b) $\sqrt[5]{4}$
   c) $\sqrt[3]{2}+1$
   d) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   e) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$.
   f) ξ_{16} su $\mathbb{Q}(i)$
   g) $\sqrt[5]{11}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{19})$.
   h) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt{2}}$
   i) ξ_7 su $\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$

2. Sia $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e dimostrare che tutte le sue radici sono in $\mathbb{Q}(\alpha)$. Qual è l'inverso di α?

3. Dimostrare che se $q\in\mathbb{Q}$ allora $\cos(q\pi)$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.

4. Dimostrare, attraverso l'uso dei polinomi ciclotomici, che $\displaystyle\sum_{d|n}\phi(d)=n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

5. Determinare un ampliamento algebrico di $\mathbb{Q}$ di grado infinito contenuto propriamente nella chiusura algebrica $\overline{\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$.

6. Dimostrare che, se $P(X)$ è un polinomio a coefficienti algebrici (su $\mathbb{Q}$), anche le sue radici sono algebriche su $\mathbb{Q}$.

7. Sia $f(X)=X^7-X+1\in\mathbb{F}_7[X]$.
   a) Verificare che f non ha radici in $\mathbb{F}_7$.
   b) Provare che, se α è una radice di f, tutte le radici sono del tipo $\alpha+b$ al variare di $b\in\mathbb{F}_7$.
   c) Dimostrare che f è irriducibile.

8. Sia $F\subseteq K$ un ampliamento di campi di caratteristica $\neq 2$, e siano $\alpha,\beta\in K$ trascendenti su F.
   a) Si verifichi che almeno uno degli elementi $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ è trascendente su F.
   b) Se $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+1=0$, cosa si può dire di $\alpha-\beta$? Quindi si calcoli, usando il punto precedente, $[F((\alpha+\beta)^3):F]$ e $[F(\alpha+\beta):F((\alpha+\beta)^3)]$.
   c) Se $\mathrm{char}(F)=2$, l'asserzione (a) è vera in generale?

9. Determinare l'n-esimo polinomio ciclotomico per $n\in[4,20]$.

10. Determinare il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}$:
    a) $\beta=\alpha+1$, dove $\alpha^3-3\alpha^2+15=0$
    b) $\beta=\alpha^2$, dove $\alpha^5-6\alpha^4+4\alpha^2-2=0$