Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di TE1

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. F. Pappalardi
Tutori: Annamaria Iezzi e Dario Spirito

TUTORATO 1
4 MARZO 2010

1. Dare una condizione necessaria e sufficiente perché l'unione di due campi E ed F sia ancora un campo.

2. Determinare se i seguenti polinomi sono irriducibili:
   a) $X^3 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$
   b) $X^2 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$
   c) $124X^3 - 119X^2 + 35X + 64 \in \mathbb{Q}[X]$
   d) $X^4 + X^3 + 4X^2 + X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$
   e) $X^5 + 5X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$
   f) $X^6 + 1 \in \mathbb{F}_{13}[X]$
   g) $X^3 + 3X^2 + 3X + 4 \in \mathbb{F}_7[X]$
   h) $X^4 + 12X^3 - 6X^2 + 18 \in \mathbb{Q}[X]$
   i) $X^2 + Y^2 + 1 \in \mathbb{R}(X)[Y]$

3. Determinare tutti i polinomi di secondo grado irriducibili su $\mathbb{F}_3$.

4. Determinare il grado delle seguenti estensioni di campi: (ξ_n indica una radice primitiva n-esima dell'unità)
   a) $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \xi_5) : \mathbb{Q}]$
   b) $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[2]{2})]$
   c) $[\mathbb{Q}(\xi_8, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$
   d) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$
   e) $[\mathbb{F}_{31}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) : \mathbb{F}_{31}(\sqrt{10})]$
   f) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) : \mathbb{Q}(\sqrt{10})]$
   g) $[\mathbb{Q}(\pi^2) : \mathbb{Q}]$
   h) $[\mathbb{F}_{343} : \mathbb{F}_7]$
   i) $[\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3}) : \mathbb{Q}(i)]$
   j) $[\mathbb{Q}(i^n) : \mathbb{Q}]$, $n \in \mathbb{N}$
   k) $[\mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) : \mathbb{Q}]$, p e q primi distinti

5. Determinare:
   a) α^5 dove $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 6 = 0$ e α appartiene ad un'estensione di $\mathbb{Q}$.
   b) β^{-1} dove $\beta^2 + \beta - 16 = 0$ e β appartiene ad un'estensione di $\mathbb{Q}$.
   c) $\dfrac{\gamma}{\gamma - 1}$ dove $\gamma^4 + \gamma - 1 = 0$ appartiene ad un'estensione di $\mathbb{F}_3$.
   d) $\dfrac{3\delta + 2}{5\delta^2 + 1}$ dove $\delta^3 + 4\delta^2 - 8\delta + 2 = 0$ e δ appartiene ad un'estensione di $\mathbb{Q}$.

6. Dimostrare o trovare un controesempio:
    a) Se $[F : E] = p$ è primo allora F è un'estensione semplice di E.
    b) Se L ed M sono estensioni di F ed E è il loro composto, allora $[E : F][L \cap M : F] = [L : F][M : F]$. A cosa è simile questa formula?
    c) Se $[\mathbb{F}(X) : \mathbb{F}] = \infty$ allora $[\mathbb{F}(X^n) : \mathbb{F}] = \infty$ per ogni intero n.

7. Sia K un campo e X un'indeterminata su K. Dimostrare che $\alpha \in K(X)$ è algebrico su K se e solo se $\alpha \in K$.