Teoria di Galois 1 - Tutorato III

Estensioni, reticoli di sottocampi, gruppi di Galois

Venerdì 1 Aprile 2005

Esercizio 1. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois, determinando anche tutti i sottocampi del campo di spezzamento, del polinomio $(x^2-2)(x^2+3)$

Esercizio 2. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del campo di spezzamento di x^n-1.

Esercizio 3. In cisacuno dei seguenti casi si dica se si tratta di estensioni separabili, normali o di Galois (nel qual caso descrivere il gruppo di Galois):

i. $\mathbb{F}_7(T)/\mathbb{F}_7(T^7)$;
ii. $\mathbb{Q}(3^{1/5})/\mathbb{Q}$;
iii. $\mathbb{F}_{11}(T)/\mathbb{F}_{11}$;
iv. $\mathbb{Q}(3^{1/5},\zeta_{30})/\mathbb{Q}(\zeta_{30})$;
v. $\mathbb{Q}(\sqrt{-1},5^{1/4})/\mathbb{Q}$;
vi. $\mathbb{Q}(\pi,\sqrt{\pi})/\mathbb{Q}(\pi)$.

Esercizio 4. Si descrivano tutti i campi intermedi tra E e $\mathbb{Q}$ in ciascuno dei seguenti casi:

a. $E=\mathbb{Q}(\zeta_n)$ con $n=16,24,13$

b. $E=\mathbb{Q}_f$ il campo di spezzamento di x^4-2

c. $E=\mathbb{Q}_f$ il campo di spezzamento di $(x^2-2)(x^2-3)(x^2-5)$.

Suggerimento: Usare la corrispondenza di Galois.

Esercizio 5. Per ciascuno dei punti dell'esercizio precedente si descrivano gli elementi del gruppo di Galois Gal(E/F).

Esercizio 6. Sia $E=\mathbb{Q}(\zeta_{13})$. Dimostrare che se $\eta=\zeta_{13}+\zeta_{13}^3+\zeta_{13}^9$, allora il polinomio minimo f_η di η su $\mathbb{Q}$ ha grado 4. Dopo averne evidenziato le radici, mostrare (calcolando) che

$$f_\eta(x)=x^4+x^3+2x^2-4x+3.$$

Qual'è la dimensione del campo di spezzamento di f_η su $\mathbb{Q}$?

Suggerimento: Usare il gruppo Gal$(\mathbb{Q}(\zeta_{13})/\mathbb{Q})$ *e la corrispondenza di Galois.*

Esercizio 7. Dimostrare $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ (dove $p > 2$ è primo) ha sempre esattamente un sottocampo quadratico. Dedurre che ogni campo ciclotomico ammette sempre un sottocampo che è un estensione quadratica di $\mathbb{Q}$.

Suggerimento: Usare il gruppo $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$ *e la corrispondenza di Galois.*

Esercizio 8. Mostrare che, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{n^2})/\mathbb{Q}(\zeta_n)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ esibendo un isomorfismo esplicito.

Sugg: considerare $\sigma_j : \zeta_{n^2} \mapsto \zeta_{n^2}^{nj+1}$.

Esercizio 9 (per che soffre di insonnia)**.** Mostrare la seguente identità:

$$\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j = \pm\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p}$$

(N.B. $\left(\frac{j}{p}\right)$ è il classico simbolo di Legendre). Dedurre che ogni campo quadratico è sempre contenuto in un campo ciclotomico.