COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Sia F un campo e sia $f \in F[x]$ irriducibile. Mostrare che f ha radici multiple se e solo se F ha caratteristica finita $p \neq 0$ e esiste $g \in F[x]$ tale che $f(x) = g(x^p)$.

2. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del polinomio $(x^2+1)(x^4-3) \in \mathbf{Q}[x]$ determinando anche tutti i sottocampi del campo di spezzamento.

3. Dopo aver verificato che è algebrico, calcolare il polinomio minimo di $\cos \pi/18$ su $\mathbf{Q}$.

4. Si consideri $E = \mathbf{F}_2[\alpha]$ dove α è una radice del polinomio $X^3 + X + 1$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{F}_2$ di $\alpha + 1$.

5. Dimostrare che $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ possiede almeno un sottocampo quadratico e fornire un esempio in cui i sottocampi quadratici sono più di uno.

6. Mostrare che se F è un campo e $g \in F[X]$, allora il grado del campo di spezzamento E_g di g su F soddisfa
$$[E_g : F] \leq \partial(g)!.$$

7. Mostrare che se p_n denota l'n–esimo numero primo, allora
$$[\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_n}) : \mathbf{Q}] = 2^n.$$
Quanti sono i sottocampi quadratici?

8. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

9. Mostrare che i polinomi irriducibili di grado 3 a coefficienti razionali che ammettono un'unica radice reale hanno S_3 come gruppo di Galois.

10. Dopo aver definito la nozione di campo perfetto, dimostrare che i campi finiti sono perfetti.

11. Sia ζ_{16} una radice primitiva 16–esima dell'unità. Descrivere gli $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$–omomorfismi di $\mathbf{Q}(\zeta_{16})$ in $\mathbf{C}$.
12. Sia E un'estensione finita di $\mathbf{Q}$ e siano E_1 e E_2 due sottocampi di E. Dimostrare che se E_1 e E_2 sono estensioni di Galois di $\mathbf{Q}$ allora anche il composto E_1E_2 è un'estensione di Galois di $\mathbf{Q}$.

NOME E COGNOME	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	TOT.
....													