COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. È vero che esistono dei valori di $a \in \mathbf{C}$ tali che $[\mathbf{Q}[\sqrt{ai}] : \mathbf{Q}] = 4$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}$–base del campo di spezzamento del polinomio $X^3 - 3 \in \mathbf{Q}[X]$.

   ....

   c. È vero che se K è il campo di spezzamento di $X^4 + X^2 + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$, allora $[K : \mathbf{F}_2] = 4$?

   ....

   d. È vero che esistono campi finiti algebricamente chiusi?

   ....

   e. È vero che il campo di spezzamento di un qualsiasi polinomio a coefficienti in un campo di caratteristica zero è un estesione di Galois del campo dei coefficienti?

   ....

2. Sia $\mathbf{F}_p$ un campo finito con p elementi. Dimostrare che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_{p^{n!}}$$

è un campo algebricamente chiuso.

3. Determinare tutti i sottocampi del campo di spezzamento di $X^7 - 1$ e dimostrare che se E è un tale sottocampi allora E è il campo di spezzamento di un opportuno polinomio in $\mathbf{Q}[X]$.

4. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio $X^6 - 8 \in \mathbf{Q}[X]$.

5. Dopo aver definito la nozione di risolubilità per radicali, dimostrare che $X^5 - 14X + 7$ non è risolubile per radicali.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Costruire un campo finito con 9 elementi e determinare l'ordine di ciascuno dei suoi elementi non nulli.

8. Considerare l'estensione algebrica semplice $\mathbf{Q}[\gamma], \gamma^3 = \gamma - 1$. Determinare il polinomio minimo di $\gamma + \frac{1}{\gamma}$ su $\mathbf{Q}$.