Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2009/2010
AL2 - Algebra 2
Svogimento dell'esame di metà semestre

Es. 1. Il supporto di ogni k-ciclo ($k \geq 2$) è dato da un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$ di cardinalità k. Il numero di sottoinsiemi di $\{1, \ldots, n\}$ di cardinalità k, ovvero il numero di combinazioni di n elementi presi k alla volta, è $\binom{n}{k}$. Chiaramente cicli con supporti diversi sono diversi. Rimane, quindi, solo da stabilire quanti siano i k-cicli di supporto fissato $T = \{i_1 \ldots i_k\}$. Per ogni $\sigma \in S_{k-1}$ $\gamma_\sigma := (i_k \ i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(k-1)})$ è un k-ciclo di supporto T; inoltre chiaramente se $\tau \neq \sigma$ allora $\gamma_\sigma \neq \gamma_\tau$; in aggiunta ogni k-ciclo di supporto T si può rappresentare partendo da i_k. Quindi tutti e soli i k-cicli di supporto T sono dati da γ_σ, al variare di $\sigma \in S_{k-1}$. Perciò i k-cicli di supporto fissato T sono $|S_{k-1}| = (k-1)!$. Quindi il numero dei k-cicli di S_n è $(k-1)!\binom{n}{k}$.

Le trasposizioni sono cicli di lunghezza 2, quindi il numero delle trasposizioni di S_n è $(2-1)!\binom{n}{2} = \binom{n}{2}$.

Es. 2. In generale siano G, H gruppi, $g \in G$, $h \in H$. Allora $o((g,h)) = mcm(o(g), o(h))$, infatti:

$$(g,h)^{mcm(o(g),o(h))} = (g^{mcm(o(g),o(h)}, h^{mcm(o(g),o(h))}) = (e_G, e_H),$$

dove e_G, e_H sono, rispettivamente, gli elementi neutri dei gruppi G e H; inoltre

$$(g,h)^{o((g,h))} = (e_G, e_H) = (g^{o((g,h))}, h^{o((g,h))})$$

perciò $o(g)|o((g,h))$ e $o(h)|o((g,h))$ da cui $mcm(o(g), o(h))|o((g,h))$.

Nel caso specifico, visto che $|D_4| = 8$ e $|\mathbb{Z}_5| = 5$ sono coprimi, necessariamente se $\tau \in D_4$ e $[x]_5 \in \mathbb{Z}_5$ allora $o((\tau, [x]_5)) = o(\tau)o([x]_5)$. Quindi $o(\tau, [x]_5) = 10 \Leftrightarrow o(\tau) = 2, o([x]_5) = 5$.

Dato che 5 è primo, tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_5$, salvo l'identità, hanno ordine 5. Come risaputo, $D_4 = \langle \rho, \sigma \rangle < S_4$, con $\rho = (1\ 2\ 3\ 4), \sigma = (1\ 4)(2\ 3)$ e $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$. Quindi gli elementi di ordine 2 di D_4 sono $\rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma$. Perciò gli elementi di ordine 10 sono 20. Siccome D_4 ha elementi di ordine 4 (ma non di ordine più alto) allora il massimo degli ordini è $4 \cdot 5 = 20$.

Es. 3. Sia $rZ(G)$ un generatore di $G/Z(G)$. Siano $g_1, g_2 \in G$. Allora esistono $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $g_1Z(G) = r^{n_1}Z(G)$ e $g_2Z(G) = r^{n_2}Z(G)$. Quindi esitono $z_1, z_2 \in Z(G)$ tali che $g_1 = r^{n_1}z_1$ e $g_2 = r^{n_2}z_2$. Ma allora $g_1g_2 = r^{n_1}z_1 \cdot r^{n_2}z_2 = z_2z_1r^{n_1+n_2} = z_2z_1r^{n_2}r^{n_1} = r^{n_2}z_2 \cdot r^{n_1}z_1 = g_2g_1$.

Es. 4. Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. $\forall([x]_n, [y]_n) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ si ha che $n(([x]_n, [y]_n)) = ([0]n, [0]_n)$ quindi $\forall([x]_n, [y]_n) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, $o(([x]_n, [y]_n))|n$. In particolare nessun elemento di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ha ordine n^2. Invece $\mathbb{Z}_{n^2}$ ha elementi di ordine n^2: ad esempio $o([1]_{n^2}) = n^2$. Quindi $\mathbb{Z}_{n^2}$ e $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ non possono essere isomorfi.

Es. 5. G è ciclico e quindi abeliano. Chiamiamo e il suo elemento neutro.

ϕ è un omomorfismo, infatti $\forall g, h \in G$, $\phi(gh) = (gh)^7 = g^7h^7 = \phi(g)\phi(h)$. ϕ è iniettivo, infatti $g^7 = e \Rightarrow o(g)|7$. Siccome $o(g)|20$ e

$MCD(20,7)=1$ allora $g^7 = e \Rightarrow o(g) = 1 \Leftrightarrow g = e$. Quindi $\ker\phi = \{e\}$, cioè ϕ è iniettivo. Per ragioni di cardinalità allora ϕ è anche suriettivo, quindi ϕ è un isomorfismo da G in G, cioè $\phi \in Aut(G)$.

Sia ora x un generatore di G. Allora $\phi(x) = x^7 \neq x$, $\phi(\phi(x)) = x^9 \neq x$, $\phi(\phi(\phi(x))) = x^3 \neq x$ e $\phi(\phi(\phi(\phi(x)))) = x$. Quindi ϕ ha ordine 4 in $(Aut(G), \circ)$.

Es. 6. In generale siano G, H gruppi. Allora $Z(G\times H) = Z(G)\times Z(H)$, infatti: $(g,h) \in Z(G\times H) \Leftrightarrow \forall g' \in G, h' \in H,\ (g,h)(g',h') = (g',h')(g,h) \Leftrightarrow (gg',hh') = (g'g,h'h) \Leftrightarrow \forall g' \in G, h' \in H,\ gg' = g'g, hh' = h'h \Leftrightarrow g \in Z(G), h \in Z(H)$.

Come nell'esercizio 2, $D_4 = \langle\rho,\sigma\rangle < S_4$. Da quanto visto nel corso delle esercitazioni e a lezione $Z(D_4) = \{id, \rho^2\}$. Quindi $Z(D_4 \times D_4) = \{(id,id),(id,\rho^2),(\rho^2,id),(\rho^2,\rho^2)\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Es. 7. Per quanto visto a lezione, considerando l'omomorfismo canonico $\pi : \mathbb{Z} \to \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{12}$, si ha una corrispondenza biunivoca, data da π, tra i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{12}$ e i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ che contengono il nucleo di π, ovvero $12\mathbb{Z}$. I sottogruppi di $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli del tipo $m\mathbb{Z}$ con $m \in \mathbb{N}$. Inoltre $m\mathbb{Z} \supseteq 12\mathbb{Z}$ se, e solo se, $m|12$. Quindi $m = 1,2,3,4,6,12$. I sottogruppi di $\mathbb{Z}_{12}$ sono perciò $\pi(\mathbb{Z}), \pi(2\mathbb{Z}), \pi(3\mathbb{Z}), \pi(4\mathbb{Z}), \pi(6\mathbb{Z}), \pi(12\mathbb{Z})$, cioè;

$\mathbb{Z}_{12}$, $\{[0]_{12},[2]_{12},[4]_{12},[6]_{12},[8]_{12},[10]_{12}\}$, $\{[0]_{12},[3]_{12},[6]_{12},[9]_{12}\}$,

$\{[0]_{12},[4]_{12},[8]_{12}\}$, $\{[0]_{12},[6]_{12}\}$, $\{[0]_{12}\}$.

Es. 8. Siano $G := \langle a\rangle$ e $K := \langle b\rangle$. $ab = ba^3$, quindi $GK = KG$, da cui GK è un gruppo e perciò $GK = \langle G,K\rangle = \langle a,b\rangle = H$. Siccome $G\cap K = \{id\}$ allora $|GK| = |G||K|$, infatti per ogni $g,g' \in G, k,k' \in K, gk = g'k' \Leftrightarrow g'^{-1}g = k'k^{-1} \Leftrightarrow g = g', k = k'$. Quindi $|H| = |G||K| = |\langle a\rangle||\langle b\rangle| = o(a)o(b) = 4\cdot 2 = 8$.

Sia $\gamma := (6\ 2)(7\ 3) \in S_7$. Allora $\gamma^{-1}(2\ 3)\gamma = (6\ 7) \notin H$. Quindi H non è normale in S_7.

Es. 9. Si verifica facilmente che H è un sottogruppo di G.

Potendo scegliere gli elementi $a,b,c \in \mathbb{F}_3$ ognuno in 3 modi, allora $|H| = 3^3 = 27$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z(H) \Leftrightarrow \forall x,y,z \in \mathbb{F}_3 \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall x,y,z \in \mathbb{F}_3,\ y+az+b = b+cx+y \Leftrightarrow$$
$\forall x,y,z \in \mathbb{F}_3,\ az = cx \Leftrightarrow a = c = 0$.

Perciò $Z(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_3$.