Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 9 - 9 Dicembre 2009

Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Dire quali dei seguenti quozienti $\frac{K[x]}{(f(x))}$ sono integri o campi

- $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x^2 - 2$
- $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_3 \qquad f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$
- $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \qquad f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$
- $K = \mathbb{Z} \qquad f(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x + 14$
- $K = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \qquad f(x) = 2x^4 + 2$

Esercizio 2.
Sia $\alpha \in \mathbb{Z}$ e sia $\varphi_\alpha := \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c. $\varphi_\alpha(f(x)) = f(\sqrt{\alpha})$,dimostrare che:

- φ é un omomorfismo e $Ker(\varphi) = (x^2 - \alpha)$
- Sia $Im(\varphi_\alpha) = \mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}] := \{a + b\sqrt{\alpha} \quad t.c. \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$ dimostrare che $Im(\varphi_\alpha) = \mathbb{Z} \iff \alpha$ è un quadrato perfetto
- Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{6}] = \frac{\mathbb{Z}[x]}{Ker(\varphi_6)}$ e non è UFD

Esercizio 3.
Sia K un campo, $\alpha \in K$ e $f(x) \in K[x]$, dimostrare che:

- $\varphi : K[x] \longrightarrow K$ t.c. $\varphi(f(x)) = f(\alpha)$ è un ben definito omomorfismo, determinarne il nucleo e immagine
- Stabilire per quali $I = (f(x))$ il quoziente $A = \frac{K[x]}{I}$ è integro
- Dimostrare che A ammette elementi nilpotenti non banali (ovvero $Nil(A) \neq \{0\}$) $\iff MCD(f(x), f'(x)) \neq 1$