Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 8 - 2 Dicembre 2009
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Si consideri l'ideale (X) in $\mathbb{Z}[X]$. Stabilire se (X) è primo o massimale.

Esercizio 2.
Dimostrare che (X) è massimale (primo) in $A[X]$ se e solo se A è un campo (dominio).

Esercizio 3.
Sia d un UFD e $a, b, c \in D$. Mostrare che:

- $a|bc$ e a è irriducibile allora $a|b$ o $a|c$
- $MCD(a, b) = 1$ e $a|bc$ allora $a|c$

Esercizio 4.
Sia A un anello commutativo unitario e $A[X]$ il relativo anello di polinomi. Dato I ideale di A, definiamo $I[X]$ come il sottoinsieme di $A[X]$ costituito da tutti i polinomi a coefficienti in I. Mostrare che:

- $I[X]$ è un ideale di $A[X]$
- $A[X]/I[X]$ è isomorfo a $(A/I)[X]$
- $I[X]$ non è massimale

Esercizio 5.
Si consideri in $\mathbb{R}[X]$ l'insieme $I := \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(\sqrt{2}) = 0 \ e \ f(\sqrt{5}) = 0\}$

- Provare che I è un ideale di $\mathbb{R}[X]$
- Provare che I non è un ideale primo
- Descrivere tutti gli ideali primi che contengono I. Sono anche massimali?