Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 5 - 4 Novembre 2009
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0, b \neq 0 \right\}$
Provare che:

- G con l'usuale moltiplicazione fra matrici è un gruppo e dire se G è abeliano.
- $H := \{M \in G \mid det(M) = 1\}$ è un sottogruppo di G.
- H è un sottogruppo normale.
- H è ciclico e trovare un suo generatore.
- Ogni elemento di G che non sta in H ha ordine 2.
- Determinare il centro di G.

Esercizio 2.
Sia S l'insieme dei numeri reali diversi da -1. Sia $\star : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$a \star b = a + b + ab$$

con $a, b \in S$.

- Provare che $\star$ definisce una operazione binaria su S.
- Provare che $(S, \star)$ è un gruppo.
- Trovare la soluzione dell'equazione $4 \star x \star 5 = 9$ in S.
- Provare che $(S, \star)$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli $\mathbb{R}^*$.

Esercizio 3.
Mostra che l'applicazione $Re : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ definita da $Re(a + ib) = a$ è un omomorfismo di gruppi. Determinarne il nucleo N e l'immagine H. Applicando il teorema di omomorfismo, definire l'isomorfismo canonico.

Esercizio 4.
Sia G un gruppo abeliano.

- Provare che gli elementi di ordine finito di G formano un sottogruppo di G che è detto il *sottogruppo di torsione di G*.
- Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo moltiplicativo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ dei numeri reali non nulli.
- Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo moltiplicativo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dei numeri complessi non nulli.
- Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}, +)$.