Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 3 - 21 Ottobre 2009
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
In $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ si descrivano $H = \langle \bar{4} \rangle$ e $K = \langle \bar{5} \rangle$.
Dopo aver giustificato il passaggio al quoziente, descrivere i gruppi quoziente $\mathbb{Z}_{20}/H$ e $\mathbb{Z}_{20}/K$. Calcolare inoltre l'ordine di ogni laterale.

Esercizio 2.
Sia G un gruppo abeliano, siano $a, b \in G$ tali che $o(a) < \infty$ e $o(b) = \infty$. Dimostrare che $o(ab) = \infty$.
La tesi è vera se a e b sono entrambi aperiodici?

Esercizio 3.
Sia $G = Z_{10}$, si consideri $f : G \longrightarrow G$ con $f(a^k) = a^{3k}$ dove a indica un generatore di G.

- Dimostrare che f è un isomorfismo
- Considerato f come elemento del gruppo di tutte le applicazioni biunivoche da G in G (i.e. S_G), calcolare il periodo di f, gli elementi del sottogruppo ciclico H generato da f e tutti i generatori di H

Esercizio 4.
Dire se l'applicazione $f : M_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ t.c. $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$ è un omomorfismo di gruppi. Dopo averne determinato il nucleo descrivere il gruppo quoziente $M_2(\mathbb{Z})/Ker(f)$.

Esercizio 5.
Sia C_n il gruppo delle radici n-esime complesse dell'unità.
Sia $x_m = cos(2\pi\frac{m}{n}) + isin(2\pi\frac{m}{n})$ $m \in \mathbb{Z}$
Dire se l'applicazione $f : (C_n, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ definita da $x_m \longmapsto m$, è un omomorfismo di gruppi. Determinarne nucleo e immagine.

Esercizio 6.
Dimostrare che un gruppo G, con notazione moltiplicativa, è abeliano se e solo se l'applicazione $f : G \longmapsto G$ t.c. $f(a) = a^2$ è un omomorfismo.

Esercizio 7.
Sia $f : \mathbb{Z}_{30} \longrightarrow G$ un omomorfismo, ove G è un gruppo di ordine 5. Determinare il nucleo di f.

Esercizio 7.
Dire se le seguenti applicazioni, f,g e h, da $\mathbb{C}^*$ in sè sono omomorfismi, in caso affermativo verificare inoltre se sono anche isomorfismi:

- $f(a + ib) = a - ib$
- $g(a + ib) = a^2 + b^2$
- $h(a + ib) = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$

Esercizio 7.
Determinare tutti gli omomorfismi suriettivi da $\mathbb{Z}_{50}$ in $\mathbb{Z}_{20}$