Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 2 - 14 Ottobre 2009
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Dimostrare che se G è un gruppo privo di sottogruppi non banali allora è finito ed ha ordine p con p primo.

Esercizio 2.
Descrivere esplicitamente il gruppo D_5 delle simmetrie del pentagono.

Esercizio 3.
Sia $G = GL_3(K)$ ove K è un campo con 5 elementi. Calcolare l'ordine di G e dimostrare che:

- Il gruppo delle matrici diagonali è un sottogruppo non normale di G e se ne determini l'ordine;
- Il gruppo delle matrici scalari è un sottogruppo normale di G e se ne determini l'ordine;
- Il gruppo delle matrici triangolari (superiori o inferiori) è un sottogruppo non normale di G e se ne determini l'ordine;
- Il gruppo delle matrici triangolari con tutti 1 sulla diagonale è un sottogruppo non normale di G e se ne determini l'ordine;
- Il gruppo delle matrici con determinante 1 è un sottogruppo normale di G e se ne determini l'ordine.

In ciascuno dei casi sopra, si stabiliscano eventuali inclusioni dei gruppi presi in considerazione e si dica se essi sono normali negli eventuali gruppi contenenti.
Per chi soffre di insonnia: Ripetere quanto fatto sopra per un generico $GL_n(\mathbb{F}_q)$.

Esercizio 4.
Dimostrare che $\mathbb{Z} = \langle p, q \rangle$ con p, q primi.

Esercizio 5.
Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Dimostrare che se $\forall\, g \in G$ si ha che $g \cdot g = 1$ allora G è abeliano.

Esercizio 6.
In A_4 si considerino i seguenti sottogruppi:

- $H = \langle (12)(34) \rangle$
- $V = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Verificare che $H \trianglelefteq V$, $V \trianglelefteq A_4$ e che H non è normale in A_4

Esercizio 7.
Verificare che l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$, con l'operazione di somma, è un gruppo.
Stabilire se è abeliano e dimostrare che non è ciclico.
Stabilire, inoltre, se $\langle 3, X \rangle = \langle 3X \rangle$ e descrivere esplicitamente gli elementi dei due sottogruppi.