Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 11 - 4 Gennaio 2010
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Nell'anello dei polinomi $K[X]$ si consideri il polinomio $f(X) = X^2 + X + 1$

- Decomporre il polinomio nei casi in cui $K = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{C}, \mathbb{R}$.
- Detto I l'ideale generato da $f(X)$, si dica quando $K[X]/I$ è un campo.

Esercizio 2.
Effettuare la divisione euclidea tra $13 + 18i$ e $5 + 3i$ in $\mathbb{Z}[i]$.
Mostrare che i possibili quozienti (ed i rispettivi resti) sono quattro.

Esercizio 3.
Dimostrare che se x è irriducibile (primo) allora anche tutti i suoi elementi associati sono irriducibili (primi).

Esercizio 4.
Sia R un anello commutativo ed unitario. Siano I, J due suoi ideali.
Sia $I+J := \{x+y \text{ con } x \in I, y \in J\}$. Sia $\phi : R \longrightarrow R/I \times R/J$, l'applicazione definita come $\phi(r) := (r + I, r + J)$ per ogni $r \in R$.

- Si dimostri che $I + J$ è un ideale di R.
- Si dimostri che ϕ è un omomorfismo unitario di anelli.
- Si dimostri che ϕ è suriettivo se e solo se $I + J = R$.
- Si dimostri che il nucleo di ϕ è $I \cap J$.
- Nel caso $R = \mathbb{Z}$, $I = 5\mathbb{Z}$, $J = 12\mathbb{Z}$, si dimostri che
  $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Esercizio 5.

Si consideri il polinomio $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

- Verificare che $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$.

- Sia θ una radice reale di $f(X)$ (dire perché esiste); si consideri l'estensione $\mathbb{Q}(\theta)$ di $\mathbb{Q}$; esprimere ciascuno dei seguenti elementi attraverso la base $\{1, \theta, \theta^2\}$:
  $\theta^4, \quad \theta^5, \quad 3\theta^5 - \theta^4 + 2, \quad (\theta^2 + 2\theta + 2)^{-1}$.

Esercizio 6.
Sia $f(X) := 2X^3 + X^2 + 1$ e $A := \mathbb{Z}_3[X]/(f(X))$.

- Mostrare che A ha zero divisori;
- Mostrare che $\alpha := X^3 + (f(X))$ è invertibile in A e determinare il suo inverso.

Esercizio 7.
Siano $f_a(X) = X^3 + X^2 + X + a \in \mathbb{Z}_3[X]$ ed $I_a = (f_a(X))$.

- Determinare per quali valori di a in $\mathbb{Z}_3$ l'anello quoziente $R_a = \mathbb{Z}_3[X]/I_a$ è un campo.
- Mostrare che $(X^5 - X^4) + I_2$ è invertibile in R_2 e calcolare il suo inverso.

Esercizio 8.
Sia K un campo e consideriamo l'anello $A = K[X;Y]/(X^2;Y^2)$.

- Dette x e y le classi di A determinate da X e Y , provare che ogni elemento di A si può esprimere in un unico modo nella forma:
  $axy + bx + cy + d$ con $a, b, c, d \in K$
- Calcolare il prodotto tra due elementi di A generici.
- Determinare gli zero divisori di A.
- Determinare gli invertibili di A.