

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010  
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi  
Prof. F. Pappalardi  
Tutorato 1 - 30 Settembre 2009  
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna  
www.matematica3.com

**Esercizio 1.**

Stabilire se i seguenti sono gruppi rispetto alla somma e al prodotto usuali

- $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $B = \{\frac{n^2}{m^2} \mid n, m \in \mathbb{N} \quad MCD(n, m) = 1\}$

**Esercizio 2.**

Dato  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$  calcolare  $o(x) \forall x \in \mathbb{Z}_{12}$

**Esercizio 3.**

Determinare se  $(\mathbb{Z}, \heartsuit)$  è un gruppo, dove

$$x \heartsuit y = xy - y$$

**Esercizio 4.**

Determinare, in  $\mathbb{Z}_{24}$ ,  $\langle \bar{3} \rangle$  e  $\langle \bar{2} \rangle$  e dimostrare che  $\langle \bar{3} \rangle \cap \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{6} \rangle$

**Esercizio 5.**

Verificare se  $(\mathbb{Z}_5, \star)$  è un gruppo, dove

$$x \star y = xy - 1$$

**Esercizio 6.**

Date le seguenti permutazioni  $\sigma$  e  $\tau$ , calcolare i prodotti dove necessario, decomporre in cicli disgiunti e calcolare la parità di  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\sigma\tau$ ,  $\tau\sigma$ ,  $\sigma^2$ ,  $\sigma^2\tau$ ,  $\tau^2$ ,  $\tau^2\sigma$ .

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & 10 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 3 & 1 & 5 & 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 7.**

Determinare l'ordine di tutti gli elementi di  $S_5$ .