Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2009/2010
AL2 - Algebra 2
Esercitazioni 2 e 3
Lunedì 19 - Mercoledì 21 Ottobre 2009
http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/CORSI/AL2_09_10/AL2.htm
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Sia G un gruppo e $X \subseteq G$, $X \neq \emptyset$. Sia $S := \{x_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\epsilon_k} : k \in \mathbb{N}^+$ e $x_i \in X, \epsilon_i \in \{-1, 1\} \forall i \in \{1, \ldots k\}\}$. Per definizione il sottogruppo di G generato da X è $\langle X \rangle := \bigcap_{\substack{H \leq G, \\ X \subseteq H}} H$. Dimostrare che $\langle X \rangle = S$.

   Soluzione:

   $\supseteq$) Sia $H \leq G$. Se $H \supseteq X$ allora, essendo H un sottogruppo, e quindi chiuso per passaggio agli inversi e per l'operazione di prodotto, allora $\forall k \in \mathbb{N}^+, \forall\ x_i \in X, \forall \epsilon_i \in \{-1, 1\},\ x_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\epsilon_k} \in H$. Quindi $S \subseteq \bigcap_{\substack{H \leq G, \\ X \subseteq H}} H = \langle X \rangle = S$.

   $\subseteq$) Basta dimostrare che S è un sottogruppo, dato che in questo modo $S \in \{H \leq G, X \subseteq H\}$ e quindi $\langle X \rangle \subseteq S$. S è non vuoto, perché lo è X. Inoltre $x_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\epsilon_k} \cdot (y_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot y_t^{\delta_t})^{-1} = x_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\epsilon_k} \cdot y_t^{-\delta_t} \cdot \ldots \cdot y_1^{-\delta_1} \in S$.

2. Sia $n \geq 3$. Determinare il centro di D_n, dove D_n è il gruppo diedrale con $2n$ elementi.

   Soluzione:

   Se $n \geq 3$ il gruppo diedrale D_n è generato da due elementi distinti ρ, σ tali che $o(\rho) = n, o(\sigma) = 2$ e $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$. Quindi

   $$D_n = \{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma\}$$

   e $x \in Z(D_n) \Leftrightarrow x$ commuta sia con ρ che con σ.

   Determiniamo gli elementi di D_n che commutano con σ, ricercandoli

   (a) tra gli elementi del tipo ρ^k con $0 \leq k \leq n - 1$;
   (b) tra gli elementi del tipo $\rho^k\sigma$ con $0 \leq k \leq n - 1$.

   (a) $\rho^k\sigma = \sigma\rho^k \Leftrightarrow \rho^k = \rho^{-k} \Leftrightarrow \rho^{2k} = 1 \Leftrightarrow n|2k$. Perciò distinguiamo i seguenti due casi:
      i. n dispari: allora $n|2k \Leftrightarrow n|k \Leftrightarrow k = 0$;
      ii. n pari: allora $n|2k \Leftrightarrow n/2|k \Leftrightarrow k = 0, n/2$.

   (b) Analogamente a quanto appena visto possiamo distinguere i seguenti due casi:
      i. n dispari: allora $k = 0$;
      ii. n pari: allora $k = 0, n/2$.

   Quindi, riassumendo: tutti e soli gli elementi di D_n che commutano con σ sono:

i. n dispari: $1, \sigma$;

ii. n pari: $1, \rho^{n/2}, \sigma, \rho^{n/2}\sigma$.

Tra questi elementi scegliamo quelli che commutano anche con ρ:

i. n dispari: dato che $\rho\sigma = \sigma\rho \Leftrightarrow \rho^2 = 1$ e dato che $n \geq 3$ allora solo 1 commuta sia con ρ che con σ;

ii. n pari: $1, \rho^{n/2}$ commutano con σ e con ρ, mentre, come prima, si puó vedere che σ e $\rho^{n/2}\sigma$ non commutano con ρ.

Ricapitolando: se n è dispari allora $Z(D_n) = \{1\}$, mentre se n è pari $Z(D_n) = \{1, \rho^{n/2}\}$. Ad esempio: $D_4 = \langle (1234), (12)(34) \rangle$ e $Z(D_4) = \{id, (13)(24)\}$.

3. Sia $n \geq 3$. Determinare $Z(S_n)$.

   Soluzione:

   Sia $f \in S_n$, $f \neq id$. Allora $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $j := f(i) \neq i$. Dato che $n \geq 3$ allora $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tale che $k \neq i, k \neq j$. Consideriamo la trasposizione (jk). Allora $((jk)f)(i) = k$, mentre $(f(jk))(i) = f(i) = j$, perciò $f \notin Z(S_n)$. Quindi $Z(S_n) = \{id\}$.

4. (Dikranjan - Aritmetica e algebra - esercizio 6.3 pag. 163)

   Sia H l'insieme delle matrici $X = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $x, y, z, a, b \in \mathbb{Z}_2$.

   (a) Si dimostri che $H \subseteq GL_4(\mathbb{Z}_2)$ e si calcoli l'ordine di H;

   (b) si descriva $Z(G)$;

   (c) si descriva il quoziente $H/Z(H)$.

   Soluzione:

   (a) $I_4 \in H$ quindi H è non vuoto. Inoltre $\forall X \in H$,

   $$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & -y & -z + bx + ay \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

   Poi: $\forall X, X' = \begin{pmatrix} 1 & x' & y' & z' \\ 0 & 1 & 0 & b' \\ 0 & 0 & 1 & a' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ si ha

   $$XX' = \begin{pmatrix} 1 & x + x' & y + y' & z + z' + b'x + a'y \\ 0 & 1 & 0 & b + b' \\ 0 & 0 & 1 & a + a' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

   Perciò H è un sottogruppo di $GL_4(\mathbb{Z}_2)$. Dato che gli elementi $x, y, z, a, b \in \mathbb{Z}_2$ si possono scegliere liberamente, allora $|H| = 2^5 = 32$.

(b) Sia $X' \in Z(H)$. In particolare quindi X' deve commutare con la matrice X, scegliendo $x = 0, y = 0, a = 0, b = 1, z = 0$, da cui: $z+z'+b'x+a'y = z'$ deve essere uguale a $z'+z+bx'+ay' = z'+x'$, che implica $x' = 0$. Analogamente si dimostra che $y' = 0, b' = 0, a' = 0$. Perciò se $Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ allora $Z(H) \subseteq \{I_4, Y\}$. Inoltre dai conti già effettuati si vede che $Y \in Z(H)$, quindi $Z(H) = \{I_4, Y\}$.

(c) Definiamo $\phi : H \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ come $\phi(X) = (x, y, a, b)$. ϕ è un omomorfismo: infatti $\phi(XX') = (x + x', y + y', a + a', b + b') = \phi(X) + \phi(X')$. Inoltre ϕ è chiaramente suriettivo. $\ker \phi = \{X : x = y = a = b = 0\} = Z(H)$, perciò per il primo teorema di omomorfismo di gruppi $H/Z(H) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5. Dimostrare che $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ è isomorfo a S_3.

   Soluzione:

   Sappiamo che, per ogni campo K, ogni matrice $A \in GL_n(K)$ rappresenta, nella base canonica, un operatore lineare invertibile T_A da K^n in K^n: $\forall v \in K^n$, $T_A(v) = Av$ In particolare, dato che per un operatore invertibile T su K^n, $T(v) = T(w) \Leftrightarrow v = w$ allora T è una biiezione di K^n in sé. Per la stessa ragione T è anche una biiezione di $K^n \setminus \{\underline{0}\}$ in sé, cioè $T \in S_{K^n \setminus \{\underline{0}\}}$, dove $S_{K^n \setminus \{\underline{0}\}}$ è il gruppo delle permutazioni dell'insieme $K^n \setminus \{\underline{0}\}$ (ovvero: è il gruppo di tutte le applicazioni biiettive di $K^n \setminus \{\underline{0}\}$ in sé). Perciò, in generale, possiamo definire $\phi : GL_n(K) \to S_{K^n \setminus \{\underline{0}\}}$ con $\phi(A) = T_A$. Dato che $\forall v \in K^n, (AB)v = A(Bv)$ allora $\phi(AB) = T_A \circ T_B$, quindi ϕ è un omomorfismo. Inoltre siccome l'equazione $Av = v$ per ogni v implica che $A = I_n$ (basta considerare i vettori della base) allora $\ker \phi = I_n$.

   Applichiamo quanto appena detto al caso delle matrici di $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ che rappresentano gli operatori lineari invertibili su $(\mathbb{Z}_2)^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Quindi $(\mathbb{Z}_2)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ha 3 elementi, perciò ϕ è un omomorfismo iniettivo da $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ a S_3. Ora, siccome $|GL_2(\mathbb{Z}_2)| = (2^2-1)(2^2-2) = 6$ ma anche $|S_3| = 6$ allora ϕ in questo caso è anche suriettivo, ovvero $GL_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

6. Sia G un gruppo e $x, y \in G$. Dimostrare che $o(xy) = o(yx)$.

   Soluzione:

   In generale, se $a, b \in G$ e a e b sono coniugati, allora $o(a) = o(b)$. Infatti, per definizione esiste $g \in G$ tale che $b = g^{-1}ag$. Ciò implica che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $b^n = g^{-1}a^n g$, quindi $b^n = e \Leftrightarrow a^n = e$ e quindi $o(a) = o(b)$. Siccome $xy = y^{-1}(yx)y$ allora xy e yx sono coniugati, e quindi possiamo concludere.