COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo dei quaternioni $\mathbf{H}$.

2. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano e sia $\psi : G \times G \to G, (x, y) \mapsto x - y$. Dopo aver dimostrato che ψ è un omomorfismo, se ne calcoli il nucleo e l'immagine.

3. Dimostrare che ogni gruppo ciclico con n elementi è isomorfo a $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

4. Dimostrare che S_4 constiene due sottogruppi con 4 elementi non isomorfi.

5. Dopo aver definito la nozione di ideale primo e di ideale massimale per un anello commutativo, si fornisca un esempio di un anello e di un suo ideale primo ma non massimale.

6. Considerare l'ideale $I = (5 + 5i, 6)$ di $\mathbf{Z}[i]$. Dimostrare che I è principale e determinarne un generatore.

7. Sia A un anello commutativo ed unitario; un elemento $a \in A$ si dice nilpotente se esiste $n > 0$ tale che $a^n = 0$. Sia $N(A)$ linsieme degli elementi nilpotenti di A. Dimostrare che $N(A)$ è un ideale di A (detto nilradicale) e che è contenuto in ogni ideale primo di A.

8. Determinare gli elementi invertibili rispetto al prodotto di $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}[X]$.

9. Considerare $f(x) = X^3 + 2X^2 + X + 2 \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]$. Dimostrare che $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]/f(X)$ non è un campo esibendo un elemento che non è invertibile. Quanti elementi ha $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]/f(X)$?