COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Sia $G = GL_2(\mathbf{F_3})$ e siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare il numero di elementi del sottogruppo $\langle A, B \rangle$.

2. Sia $G = S_4$. Determinare un sottogruppo di G avente ciascuno dei seguenti ordini: $2, 3, 4, 6, 8, 12$. Dimostrare che G non ammette sottogruppi di ordine 10.

3. Sia G un gruppo e sia G' is sottogruppo generato degli elementi della forma $a^{-1}b^{-1}ab$ con $a, b \in G$. Dimostrare che G' è un sottogruppo normale di G e che il quoziente G/G' è abeliano.

4. Enunciare e dimostrare il Toerema di Lagrange per gruppi finiti.

5. Dimostrare che $(2) \subset \mathbf{Z}[X]$ è un ideale primo ma non è un ideale massimale.

6. Calcolare $\mathrm{MCD}(5+5i, 6)$ in $\mathbf{Z}[i]$.

7. Dimostrare che $\mathbf{C}[X, Y]$ non è un dominio a ideali principali ma è un dominio a fattorizzazione unica.

8. Determinare gli elementi invertibili rispetto al prodotto di $\mathbf{Z}[i][X]$.

9. Determinare la fattorizzazione di $X^4 + X^2 + 1$ in $\mathbf{Z}[X]$, in $\mathbf{R}[X]$ e in $\mathbf{F}_2[X]$.