COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Descrivere tutti i sottogruppi normali di D_4.

2. Fornire la definizione di centro $Z(G)$ di un gruppo G e dimostrare che se $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, allora $\psi(Z(G)) = Z(G)$.

3. Dimostrare che l'unico omomorfismo $\phi : \mathbf{Z}_5 \mapsto S_4$ è quello banale (i.e. $\psi(x) = (1)$ $\forall x \in \mathbf{Z}_5$.

4. Descrivere il gruppo D_6 e dimostrare che è isomorfo a un sottogruppo di S_6. Dimostrare che non è un sottogruppo normale.

5. Applicare il Teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti per determinare tutte le classi di isomorfismo dei gruppi abeliani con 36 elementi.

6. Stabilire se l'anello $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}$ è unitario e determinare i suoi divisori dello zero e le sue unità.

7. Definire la nozione di Anello Euclideo e dimostrare che $\mathbf{Z}$ è Euclideo.

8. Dimostrare che il polinomio $f(X) = X^4 - 4X^3 + 6X^2 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$ è irriducibile (*suggerimento: considerare* $f(X+1)$).

9. Determinare esplicitamente un campo finito con 27 elementi (*i.e. realizzarlo come quoziente tra un anello di polinomi e un suo ideale*).