COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Dimostrare che il nucleo di un omomorfismo di anelli (non necessariamente commutativi) è un ideale bilaterale del dominio.

2. Considerare l'insieme $A = \{n + 2m\sqrt{2} | m, n \in \mathbf{Z}\}$. Dimostrare che A è un anello commutativo con unità.

3. Dimostrare che l'anello $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$ non è a fattorizzazione unica (suggerimento: cercare elementi di norma 25).

4. Considerare l'applicazione $\Psi : \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Z}_8, f(X) \mapsto f(3) \bmod 8$. Dopo aver verificato che si tratta di un omomorfismo, se ne calcoli il nucleo e l'immagine. Verificare se il nucleo è un ideale primo di $\mathbf{Z}[X]$.

5. Sia $A = \{\frac{n}{2^\alpha} \mid n \in \mathbf{Z}, \alpha \in \mathbf{N}\}$. Dopo aver dimostrato che A è un anello, dimostrare che il suo campo dei quozienti è $\mathbf{Q}$.

6. Dimostrare che il prodotto di due anelli ha sempre divisori dello zero.

7. Dimostrare che l'ideale $\langle 2, X\rangle \subset \mathbf{Z}[X]$ non è principale. Dedurre che $\mathbf{Z}[X]$ non è un anello Euclideo.

8. Dimostrare che il polinomio $X^4 + 6X + 12 \in \mathbf{Q}[X]$ è irriducibile.

9. Si consideri il campo con 7 elementi $\mathbf{F}_7$ e il polinomio $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbf{F}_7[X]$. Dimostrare che l'anello quoziente $\mathbf{F}_7[x]/(f(X))$ è un campo e se ne calcoli il numero di elementi.