COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Dimostrare che il numero di trasposizioni in S_n è $\binom{n}{2}$ e che il numero di k–cicli è $(k-1)!\binom{n}{k}$.

2. Calcolare il numero di elementi di ordine 10 di $D_4 \times \mathbf{Z}_5$ e dire quale è il massimo degli ordini di tutti gli elementi.

3. Sia G un gruppo. Dimostrare che se $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.

4. Dimostrare che $\mathbf{Z}_{n^2}$ e $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$ non sono isomorfi.

5. Sia G un gruppo ciclico con 20 elementi e sia $\phi : G \to G, g \mapsto g^7$. Dimostrare che $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ e calcolarne l'ordine (in $\mathrm{Aut}(G)$).

6. Calcolare il centro di $D_4 \times D_4$.

7. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbf{Z}_{12}$.

8. In S_7 sia $a = (1\ 3\ 5\ 2)$ e $b = (2\ 3)$. Dimostrare che $H = \langle a, b \rangle$ ha 8 elementi e stabilire se H è un sottogruppo normale di S_7.

9. Sia $G = \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_3)$ e $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}$. Determinare il numero di elementi di H dopo aver mostrato che è un sottogruppo e calcolare $Z(H)$.